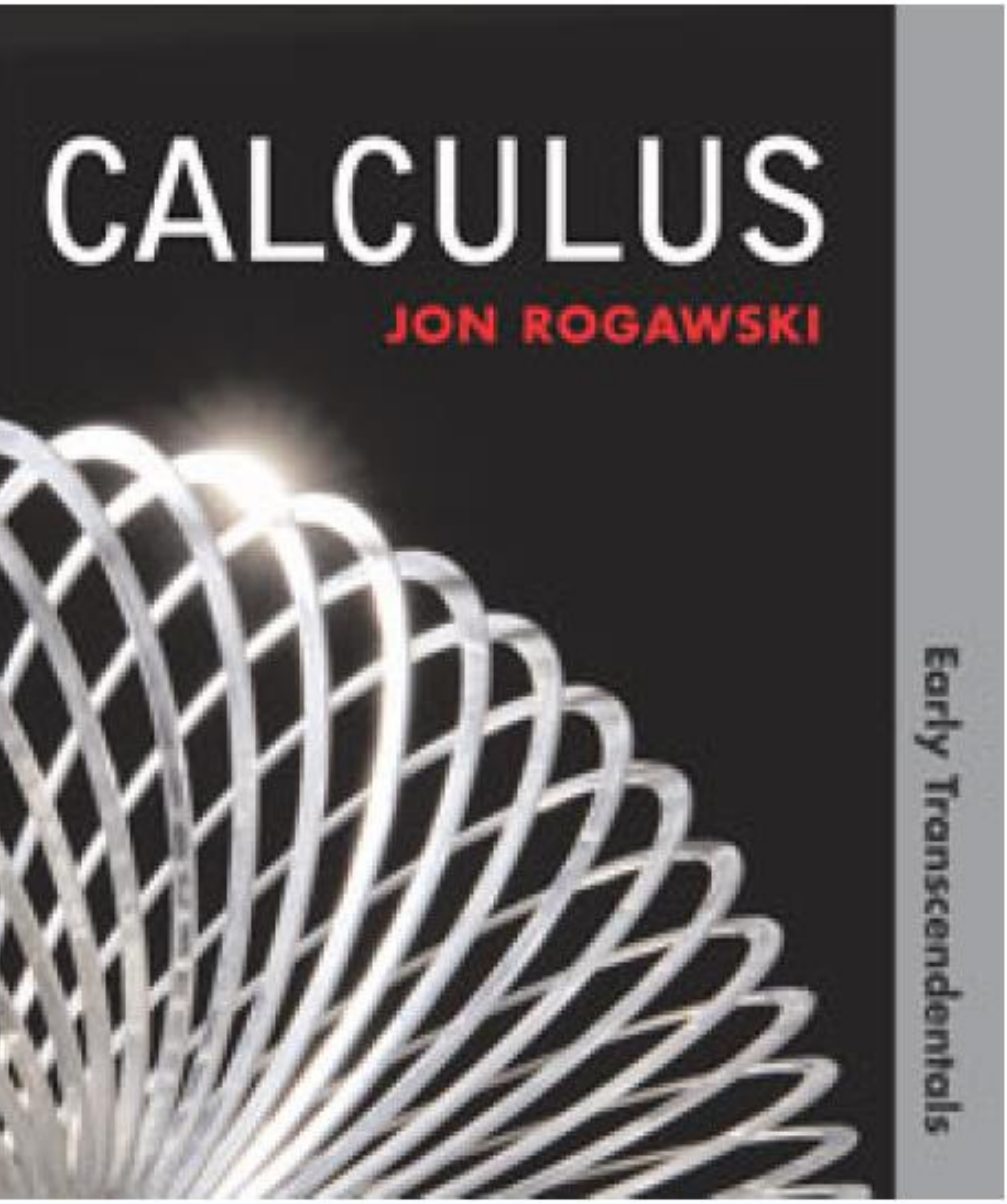


Traducere: Nicolae Coman

din lucrarea

JON ROGAWSKI (University of California, Los Angeles)

CALCULUS (Early Transcendentals)

Cuprins

I. INTRODUCERE

Analiza matematică, împreună cu algebra, geometria analitică şi trigonometria, stă la baza studiului fenomenelor naturii.

Funcţia matematică reprezintă unul dintre cele mai imporante metode de a analiza fenomenele naturii. Astfel, biologii studiază greutatea coarnelor cerbului în funcţie de vârstă (v. pag. 6).

I.1. Numere reale, funcţii şi grafice

Pentru început, vom trece în revistă câteva din propritățile de bază ale numerelor reale.
Un număr real poate fi reprezentat printr-un număr finit sau infinit de zecimale, în acest ultim caz zecimalele repetându-se sau nu periodic.

Exemple: $\frac{3}{8} = 0{,}375$, $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0,\overline{142857}$

$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$

Mulţimea numerelor reale este notată prin $\mathbb{R}$.
Dacă nu există riscul vreunei confuzii, prin noţiunea de "*număr*" ne vom referi la număr real.
Mulţimea numerelor întregi va fi notată prin:

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ \}$$

Un număr va fi numit **raţional** dacă poate fi reprezentat printr-o fracţie de tip $\frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$, cu $q \neq 0$.
Numere ca π, **e** ("numărul lui EULER") sau $\sqrt{2}$ sunt numite numere **iraţionale**.

Numerele raţionale au o reprezentare zecimală finită sau cu zecimale care se repetă periodic. Reprezentarea zecimală a unui număr este unică, cu excepţia cazului când se utilizează dezvoltarea zecimală cu cifra 9 care se repetă la infinit, de exemplu:

$$1 = 0{,}999\ldots\,, \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375 = 0{,}374999\ldots\,, \qquad \frac{47}{20} = 2{,}35 = 2{,}34999\ldots\ .$$

Numerele reale pot fi reprezentate ca puncte pe o dreaptă (v. fig. 1), de aceea mai sunt numite **puncte**. Numărul 0 este **originea** dreptei reale.

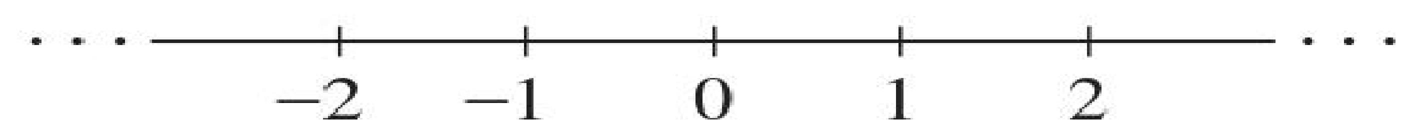


Fig. 1 Mulţimea numerelor reale reprezentate pe o dreaptă.

Alte proprietăţi ale numerelor reale vor fi discutate în *Anexa B*.

Valoarea absolută (*modulul*) unui număr real este definită (v. fig. 2) astfel:

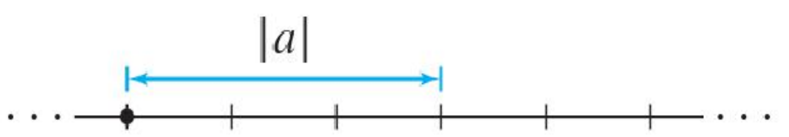


Fig. 2 Valoarea absolută |a|.

$$|a| = \begin{cases} a\,, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a\,, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

şi reprezintă distanţa punctului respectiv până la origine.

Valoarea absolută posedă proprietăţile:

$$|a| = -a, \qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Distanţa dintre punctele a şi b este $|b - a|$, adică lungimea segmentului care uneşte punctele *a* şi *b* (fig. 3).

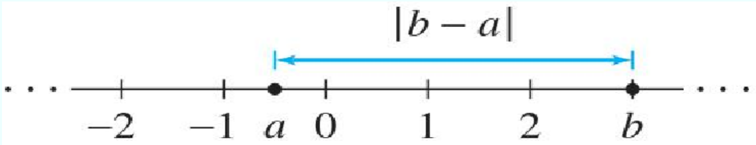


Fig. 3 Distanţa dintre punctele a, b este |b-a|.

Atenţie, $|a + b|$ nu este identic cu $|a| + |b|$, decât în cazul când a şi b au acelaşi semn sau unul dintre ei este nul!
Când acestea au semne contrare, avem $|a + b| < |a| + |b|$
În cazul general, este valabilă **inegalitatea triunghiului**:

$$|a + b| \leq |a| + |b|\ . \qquad (1)$$

Dacă se dau numerele a, b , a < b, acestea determină ca extremităţi patru tipuri de intervale.
Intervalul închis [a, b] este definit prin:

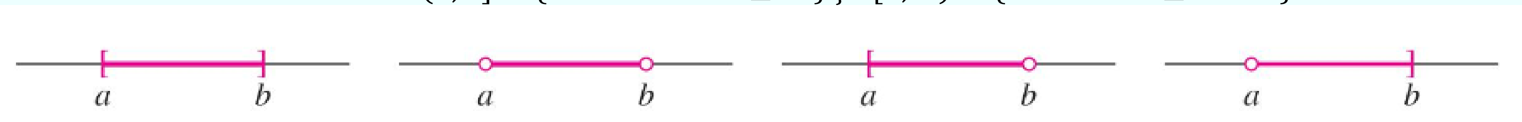
$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b \},$$

iar cel deschis:

$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : \ a < x < b \}.$$

În mod similar se definesc intervalele semideschise:

$$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \le b \} \text{ şi } [a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : \ a \le x < b \}.$$



Intervalul închis [a,b] Intervalul deschis (a,b) Intervalul semideschis [a, b) Intervalul semideschis (a, b]

(capetele incluse) (capetele excluse)

Fig.4 Cele patru tipuri de intervale delimitate de *a* şi *b*.

Intervalul infinit $(-\infty, \infty)$ este întreaga dreaptă reală $\mathbb{R}$. Un interval cu un capăt la infinit poate fi închis sau deschis (v. fig. 5), exemple:

$$[a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \}, \qquad (-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}.$$

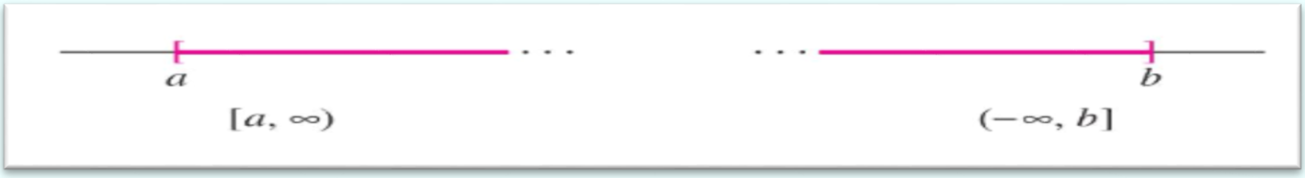


Fig. 5 Intervale cu un capăt la infinit.

Intervalele mai pot fi descrise atât prin inegalităţi, cât şi cu ajutorul modulului (fig. 6):

$$\boxed{|x| < r \iff -r < x < r \iff x \in (-r, r).} \qquad (2)$$

În general, pentru orice c (fig. 7):

$$\boxed{|x - c| < r \iff c - r < x < c + r \iff x \in (c - r, \quad c + r).} \qquad (3)$$

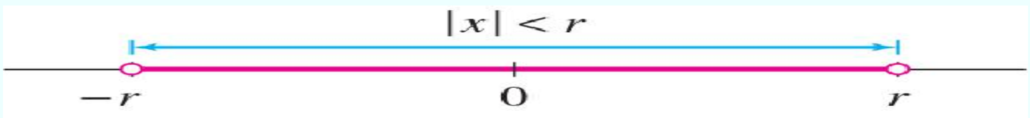


Fig. 6 Intervalul $(-r, r) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| < r\}$.

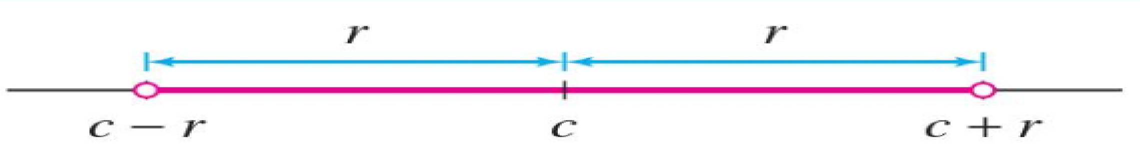


Fig. 7 $(a, b) = (c - r, c + r),\ unde\ c = \frac{a+b}{2},\ r = \frac{b-a}{2}.$

O afirmaţie similară se obţine pentru intervalele închise înlocuind semnul $<$ cu $\leq$.
Valoarea r se va numi **rază** iar c **centru**. Astfel intervalele (a, b) şi [a, b] au centrul $c = \frac{1}{2}(a+b)$ şi raza $r = \frac{1}{2}(b-a)$ (fig. 7).

■ **EXEMPLUL 1.** Descrierea intervalelor prin inegalităţi. Să se descrie intervalele (-4, 4) şi [7, 13] utilizând inegalităţi.
Soluţie. Avem $(-4, 4) = \{ x : \ |x| < 4 \}$. Centrul intervalului [7, 13]este
$c = \dfrac{1}{2}(7 + 13) = 10$, iar raza este $r = \dfrac{1}{2}(13 - 7) = 3$ (fig. 8). Deci:
$[7, 13] = \{ x \in \mathbb{R} : |x - 10| \leq 3 \}$.

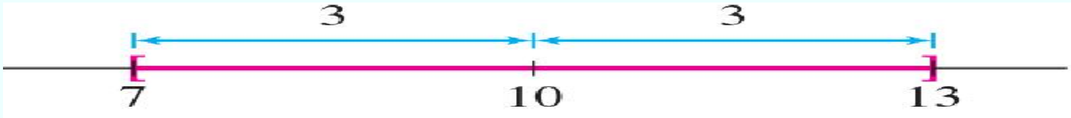


Fig.8 Intervalul [7, 13] este descris prin $|x - 10| \leq 3$.

■ **EXEMPLUL 2.** Descrieţi mulţimea $S = \left\{ x \ : \ \left|\frac{1}{2}x - 3\right| > 4 \right\}$ sub formă de interval.

Soluţie. E mai comod să considerăm inegalitatea opusă $\left|\frac{1}{2}x - 4\right| \leq 4$.

Din (2) rezultă:

$$\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \leq 4 \iff -4 \leq \frac{1}{2}x - 3 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 14 .$$

Deci $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \leq 4$ este satisfăcută când $x \in [-2, 14]$. Dar S este mulţimea complementară:

$$S = (-\infty, -2) \cup (14, \infty) \quad \text{(fig. 9)} .$$

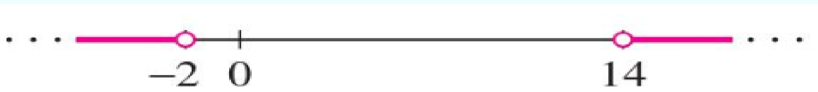


Fig. 9 Mulţimea $S = \left\{ x : \ \left|\frac{1}{2}x - 3\right| > 4 \right\}$.

Graficul unei funcţii

Reprezentarea grafică a unei funcţii este la fel de importantă şi în algebră şi în trigonometrie.
Reamintim că sistemul de coordonate rectangular (cartezian) în plan este definit prin alegerea a două axe perpendiculare, axa Ox şi axa Oy.

Unei perechi de numere (a, b) i se asociază punctul P situat la intersecţia perpendicularei la axa Ox dusă prin punctul de abscisă a cu perpendiculara la Oy dusă prin punctul de ordonată b (fig. 10(A)).
Numerele a şi b se numesc **coordonatele** lui P. **Originea** axelor are coordonatele $(0, 0)$.
Cele două axe de coordonate împart planul în patru regiuni, numite $I - IV$, caracterizate prin semnele coordonatelor (fig. 10 (B)). De exemplu, cadranul III constă din acele puncte (x, y) pentru care $x < 0$ şi $y < 0$.

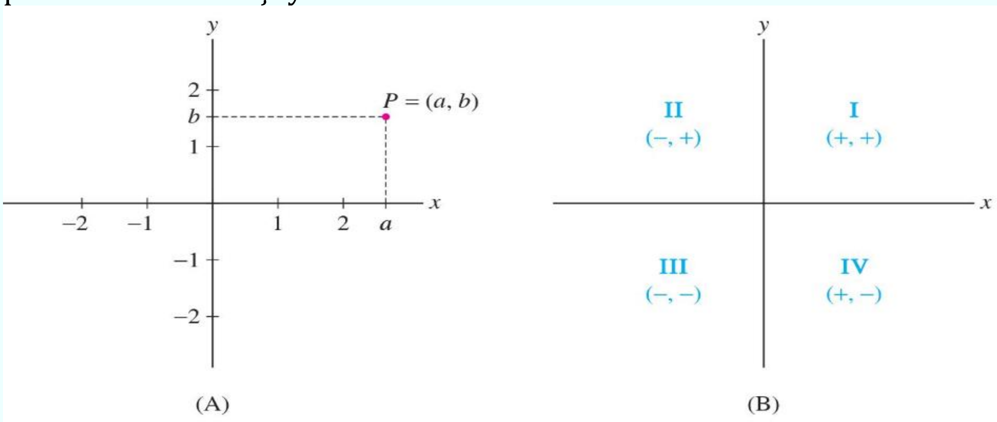
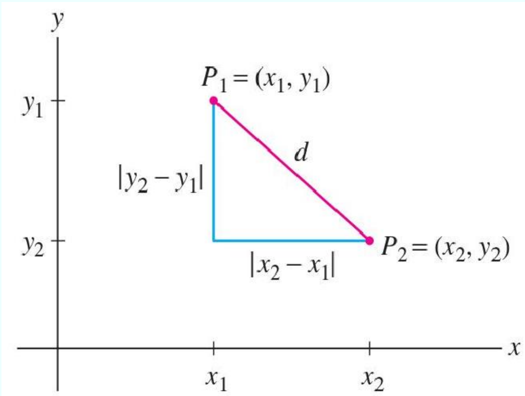


Fig. 10 Sistemul de coordonate rectangular.

Distanţa dintre punctele $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ se obţine cu ajutorul teoremei lui PITAGORA.
Pe fig. 11 se vede că $\overline{P_1P_2}$ este ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu laturile:
$a = |x_2 - x_1|$ şi $b = |y_2 - y_1|$.
Deci:
$d^2 = a^2 + b^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.



Astfel obţinem:

Fig. 11 Distanţa d este dată de formula distanţei.

Formula distanţei. Distanţa dintre punctele $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ este dată de:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Cu ajutorul formulei distanţei putem să deducem ecuaţia cercului de rază r şi centru (a, b) .
Un punct (x, y) se află pe acest cerc dacă şi numai dacă:
$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$.
Ridicând la pătrat, obţinem ecuaţia cercului:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 .$$

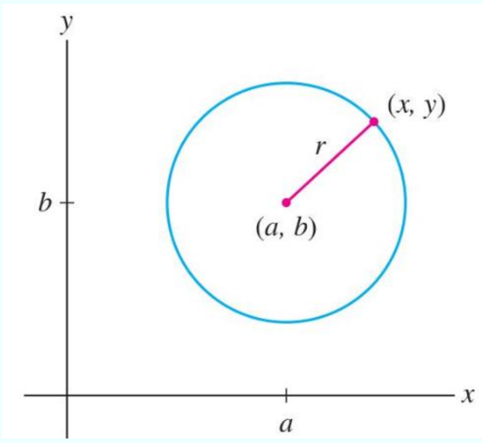


Fig. 12. Cercul de ecuaţie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Acum vom revedea câteva definiţii şi notaţii privind funcţiile.

DEFINIŢIE. Funcţie . O **funcţie** f de la mulţimea D la mulţimea Y este o regulă care atribuie fiecărui element din D un element unic $y = f(x) \in Y$.

Se scrie simbolic: $f: D \to Y$.

Pentru un $x \in D$, f(x) se numeşte **valoarea** lui f în x (fig. 13). Mulţimea D se numeşte **domeniul** lui $f(x)$, iar **codomeniul** este submulţimea lui Y formată din toate valorile $f(x)$: $E = \{ y \in Y : f(x) = y \ \forall x \in D \}$
Informal, putem imagina o funcţie ca fiind un mecanism, un transformator, care pentru o intrare x generează o ieşire $y = f(x)$ (fig. 14).

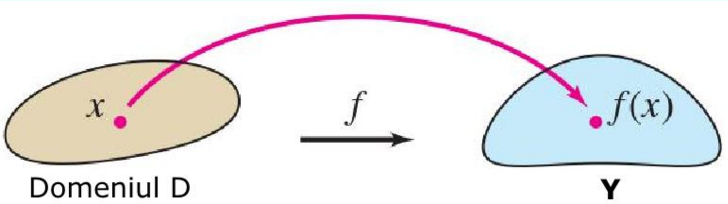


Fig. 13 O funcţie este o regulă care asociază oricărui element $x \in D$ un element $y = f(x)$.

Fig. 14 O funcţie poate fi imaginată ca un mecanism cu intrarea *x* şi ieşirea *f(x)* .

În prima parte a acestei lucrări ne vom referi la funcţii *numerice*, unde, atât domeniul cât şi codomeniul sunt mulţimi de numere reale. Mai târziu, în cadrul calculului multivariabil, cele două mulţimi pot conţine şi numere multidimensionale sau vectori. Litera x denumeşte **variabila independentă**, deoarece poate lua orice valoare din domeniul D. Vom spune că $y = f(x)$ este **variabila dependentă**, deoarece valoarea acesteia depinde de x.
Dacă f este definită printr-o formulă matematică, domeniul ei de definiţie trebuie să fie inclus în acea mulţime de numere reale pentru care formula are sens.
De exemplu, funcţia definită prin $f(x) = \sqrt{9 - x}$ are ca domeniu de definiţie: $D = \{ x : x \leq 9 \}$, deoarece $\sqrt{9 - x}$ este definit numai dacă $9 - x \geq 0$.
Iată câteva exemple:

f(x)	Domeniul D	Codomeniul R
x^2	$\mathbb{R}$	$\{ y : y \geq 0 \}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\{ y : -1 \leq y \leq 1 \}$
$\dfrac{1}{x+1}$	$\{ x : x \neq -1 \}$	$\{ y : y \neq 0 \}$

Graficul unei funcţii f(x) se obţine trasând curba care uneşte punctele $(a, f(a))$ pentru $a \in D$ (fig. 15).
Rădăcina sau zeroul funcţiei f(x) este acel număr c pentru care $f(c) = 0$.
În cadrul *Capitolului IV*, vom utiliza cunoştinţele de analiză matematică pentru a trasa şi studia **grafice** în **mod detaliat**.

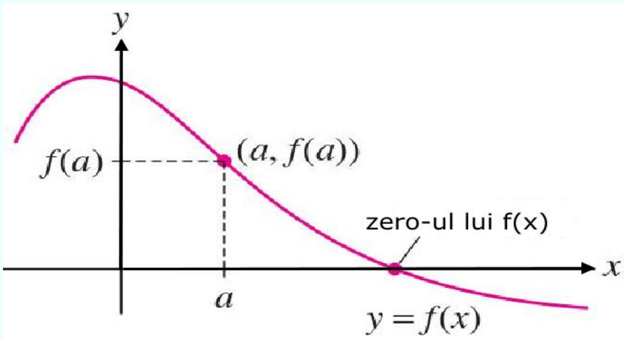


***Fig.* 15**

■ **EXEMPLUL 3.** Aflaţi rădăcinile şi trasaţi graficul lui $f(x) = x^3 - 2x$.
Soluţie. Rezolvând ecuaţia

$$x^3 - 2x = x\,(x^2 - 2) = 0$$

se obţin rădăcinile:

$$x = 0 \text{ şi } x = \pm\sqrt{2}.$$

Se trasează rădăcinile şi câteva valori listate în Tabelul 1 şi se unesc sub forma unei curbe (fig. 16).

TABELUL 1

x	$x^3 - 2x$
-2	-4
-1	1
0	0
1	-1
2	4

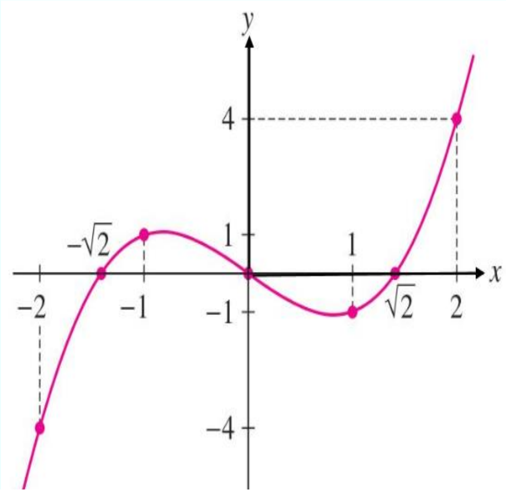
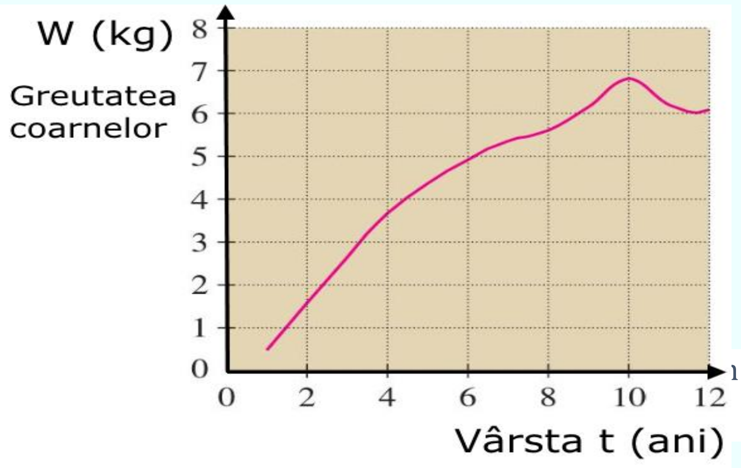


Fig. 16 Graficul lui $f(x) = x^3 - 2x$.

Funcţiile care apar în practică nu sunt întotdeauna date sub formă de formulă.
Astfel fig. 17 şi Tabelul 2 indică rezultate culese sub formă de observaţie de către biologul JULIAN HUXLEY, într-un studiu privind dependenţa de vârstă a mărimii coarnelor la cerbul roşu "*Cervus elaphus*".



Putem trasa grafic orice relaţie între y şi x.
De exemplu pentru graficul ecuaţiei $4y^2 - x^3 = 3$ se obţine o curbă (fig. 18) care nu poate fi graficul unei funcţii deoarece nu trece **testul liniei verticale**:
Orice linie verticală (deci de tipul $x = a$) trebuie să intersecteze curba în cel mult un punct.

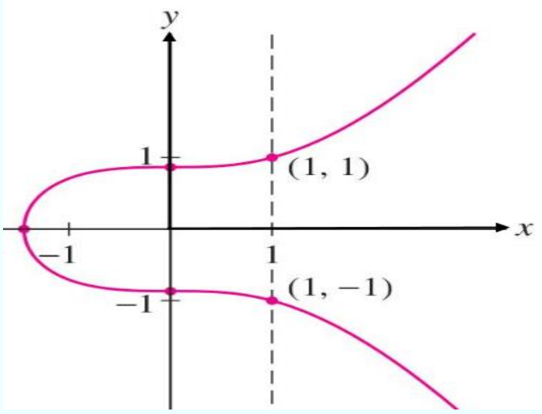


Fig. 18 Reprezentarea grafică a *ecuaţiei* $4y^2 - x^3 = 3$ nu poate fi graficul unei funcţii.

O altă problemă care se pune în legătură cu funcţiile o constituie monotonia acestora. Intuitiv, spunem că o funcţie este crescătoare dacă graficul acesteia urcă atunci când ne deplasăm spre dreapta şi descrescătoare în caz contrar (fig. 19 (A) şi (B)). Cele două noţiuni se pot defini riguros astfel:

✦ f este **crescătoare** pe (a, b) dacă $f(x_1) \leq f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in (a, b)$ a. î. $x_1 \leq x_2$;

✦ f este **descrescătoare** pe (a, b) dacă $f(x_1) \leq f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in (a, b)$ a. î. $x_1 \leq x_2$.

Funcţia din fig. 19 (D) este descrescătoare doar pe intervalul (a, b).

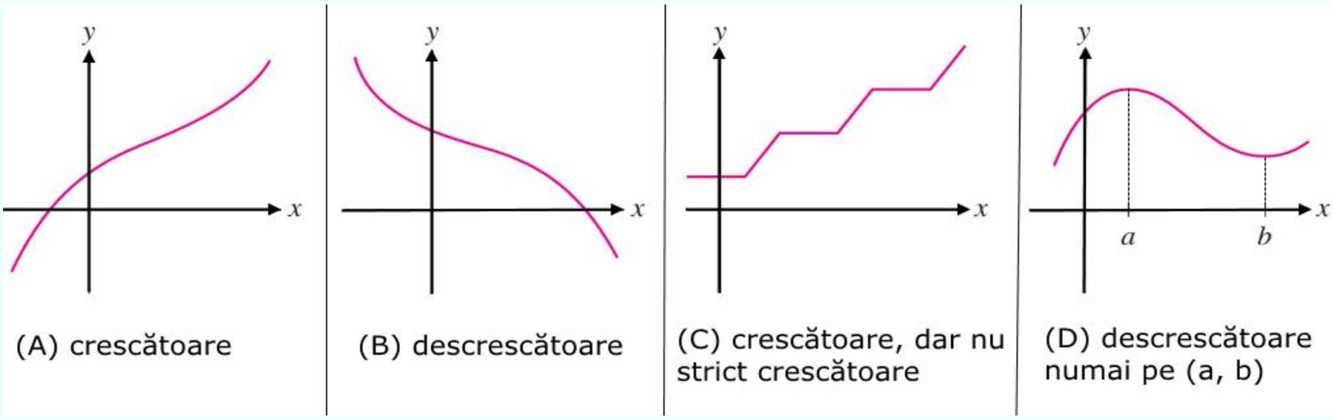


Fig. 19

Funcţia din fig. 19 (C) este crescătoare dar nu strict crescătoare.

O altă proprietate a funcţiilor este **paritatea**. Spunem că:

✦ f este pară dacă $f(-x) = f(x)$;

✦ f este impară dacă $f(-x) = -f(x)$.

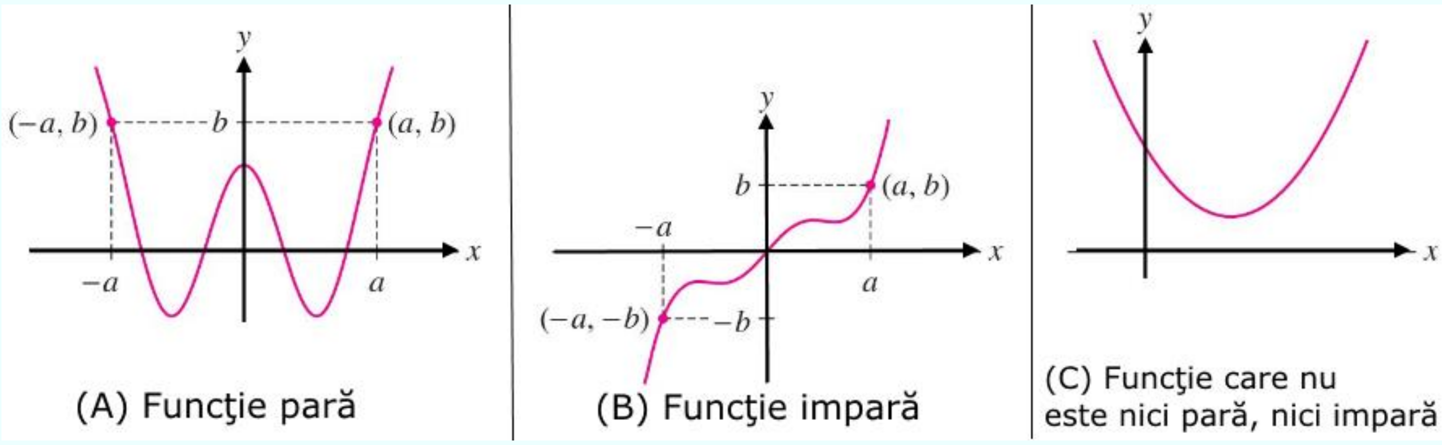


Fig. 20

Graficul unei funcţii impare este simetric faţă de originea axelor (fig. 20 (B)) .
Există şi funcţii care nu sunt nici pare nici impare (fig. 20 (C)).

■ **EXEMPLUL 4.** Determinaţi dacă funcţia este pară, impară sau de niciun fel.

(***a***) $f(x) = x^4$; (***b***) $g(x) = x^{-1}$; (***c***) $h(x) = x^2 + x$.

Soluţie. (**a**) $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Astfel, $f(x) = f(-x)$ deci f este pară.
(**b**) impară.
(**c**) nici pară, nici impară.

EXEMPLUL 5. Trasare a unui grafic utilizând simetria. Trasaţi graficul lui $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Soluţie. Funcţia f este pozitivă:

$$f(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

f este şi pară:

$$f(x) = f(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Deci graficul se află deasupra axei Ox şi este simetric faţă de axa Oy.
Cu ajutorul unei mici tabele de valori (Tabel 3), putem trasa graficul (fig. 21).
De remarcat faptul că graficul se apropie de axa Ox cu cât $|x|$ este mai mare.

TABEL 3

x	$\dfrac{1}{x^2+1}$
0	1
±1	$\dfrac{1}{2}$
±2	$\dfrac{1}{5}$

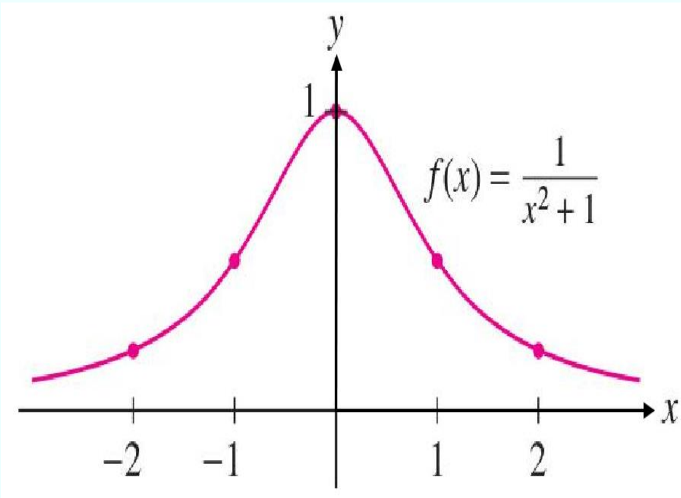


Fig. 21

Există două modalităţi de bază de modificare a unui grafic: translaţie (sau deplasare) şi transformare la scară. Translaţia constă în mutarea graficului pe orizontală sau pe verticală, acesta rămânând nemo ca mărime.

DEFINIŢIE. Translaţie a unui grafic .

✦ **Translaţie pe verticală**: $y = f(x) + c$: Graficul este deplasat vertical cu c unităţi.
Dacă $c < 0$, deplasarea se efectuează în jos .

✦ **Translaţie pe orizontală**: $y = f(x + c)$: Graficul este deplasat orizontal cu c unităţi.
Dacă $c < 0$, deplasarea se efectuează la dreapta şi dacă $c > 0$ se face la stânga .

Fig. 22 demonstrează efectul translatării graficului funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ vertical şi orizontal.

Reţineţi!
Funcţiile de ecuaţie $y = f(x) + c$ şi $y = f(x + c)$ sunt diferite.
Graficul primeia este o translaţie verticală, iar a celei de-a doua una orizontală a graficului lui $y = f(x)$.

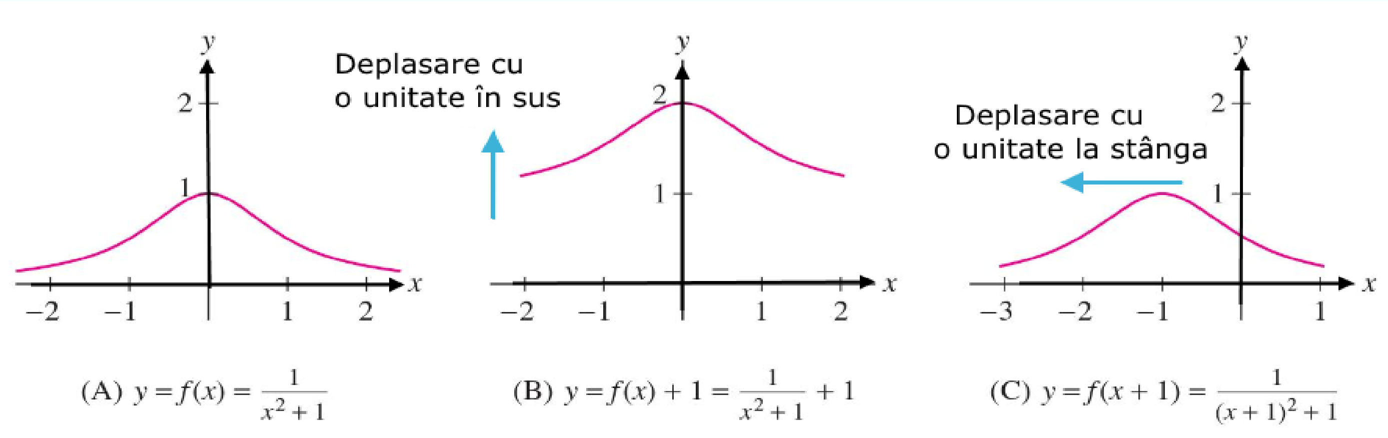


Fig. 22

EXEMPLUL 6. Fig. 23(A) reprezintă graficul lui $f(x) = x^2$, iar fig. 23(B) este o deplasare pe orizontală şi pe verticală a lui (A). Care este ecuaţia corespunzătoare graficului (B) ?

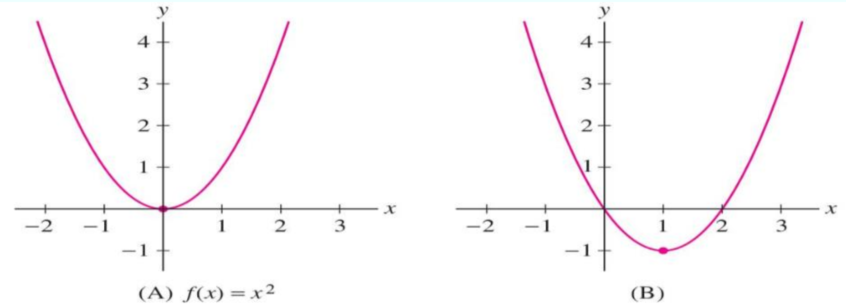


Fig. 23

Soluţie. Graficul (B) este obţinut printr-o deplasare la dreapta şi în jos cu câte o unitate. Deci (B) este graficul lui $g(x) = (x-1)^2 - 1$.

Dilatarea sau **contractarea** graficului constă în transformarea acestuia la scară pe orizontală sau pe verticală.

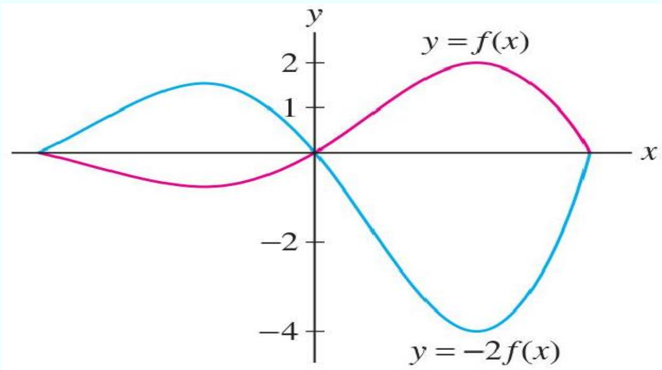


Fig. 24 Dilatare pe verticală a graficului cu k=-2.

DEFINIŢIE. Dilatare a unui grafic .

✦ **Dilatare pe verticală**: $y = k \cdot f(x)$:

- Dacă $k > 1$, atunci graficul se dilată vertical cu factorul k.
- Dacă $0 < k < 1$, atunci graficul se comprimă (se contractă) vertical cu factorul k.
- Dacă $k < 0$, atunci graficul se «reflectă» peste axa Ox (fig. 24).

✦ **Dilatare pe orizontală**: $y = f(kx)$:

- Dacă $k > 1$, atunci graficul se contractă pe direcţie orizontală.
- Dacă $0 < k < 1$, atunci graficul se dilată orizontal.
- Dacă $k > 1$, atunci graficul se «reflectă» peste axa Oy.

Dilatarea (contractarea) pe verticală măreşte (scade) **amplitudinea** graficului cu factorul k.

> *Reţineţi!*
> Funcţiile de ecuaţie $y = k \cdot f(x)$ şi $y = f(k \cdot x)$ sunt diferite. Graficul primeia este o dilatare verticală, iar a celei de-a doua una orizontală a graficului lui $y = f(x)$.

EXEMPLUL 7. Trasaţi graficul funcţiei $f(x) = \sin(\pi x)$ şi ale dilatărilor acesteia: $f(3x)$ şi $3\,f(x)$.

Soluţie. Graficul lui $f(x) = \sin(\pi x)$ este curba sinusoidală de perioadă 2 (fig. 25(A)) .

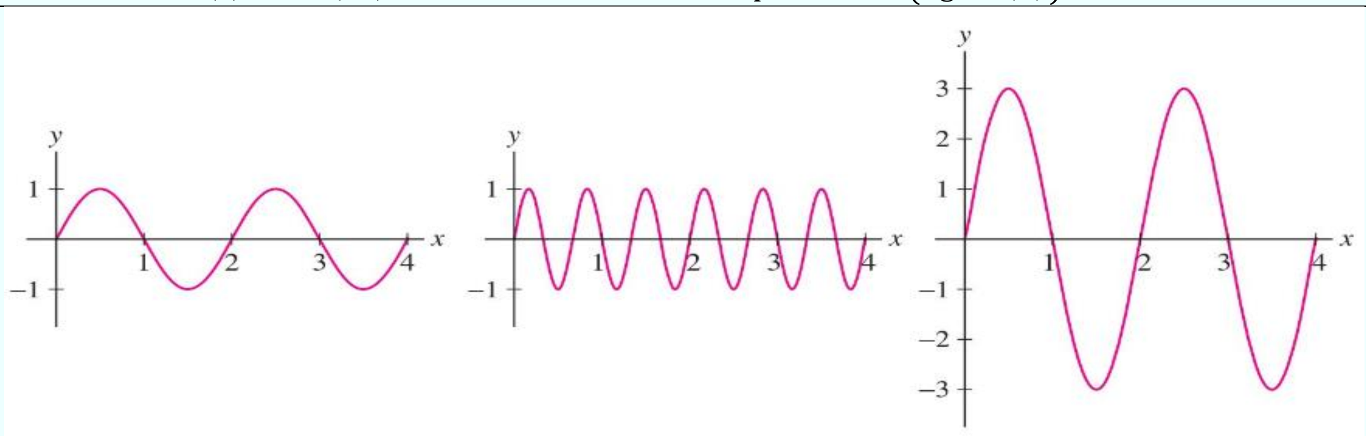


Fig. 25 Dilatări ale funcţiei $f(x) = \sin(\pi x)$.

(A) $y = f(x) = \sin(\pi x)$	(B) Compresie orizontală $y = f(x) = \sin(\pi x)$	(C) Expansiune pe verticală $y = f(x) = \sin(\pi x)$

- Graficul lui $y = f(3x) = \sin(3\pi x)$ este o versiune „comprimată” a lui $y = f(x)$ (fig. 25(B)).
  Acesta încheie trei cicluri (perioade) pe un interval de lungime 2.
- Graficul lui $y = 3\,f(x) = 3\sin(\pi x)$ diferă de $y = f(x)$ doar prin amplitudine.

Este dilatat pe verticală cu factorul 3 (fig. 25(C)).

1.1 Sumar

- Valoare absolută: $|a| = \begin{cases} a\,, & dacă\ a \geq 0 \\ -a\,, & dacă\ a < 0 \end{cases}$

- Inegalitatea triunghiului: $|a+b| \leq |a| + |b|$
- Există patru tipuri de intervale cu extremităţile în a şi b:

$$(a, b), \qquad [a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b]$$

- Putem exprima intervalele cu ajutorul inegalităţilor:

$$(a, b) = \{\, x : \ |x-c| < r \,\}, \ [a, b] = \{\, x : \ |x-c| \leq r \,\},$$

unde $c = \frac{1}{2}(a+b)$ este centrul, iar $r = \frac{1}{2}(b-a)$ este raza.

- Distanţa dintre punctele (x_1, x_2) *şi* (y_1, y_2) este : $d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.
- Ecuaţia cercului de rază r şi centru (a, b) : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.
- Un zero sau o rădăcină a funcţiei $f(x)$ este un număr c cu proprietatea $f(c) = 0$.
- „*Testul liniei verticale*": O curbă plană este graficul unei funcţii dacă şi numai dacă orice linie verticală $x = a$ intersectează curba în cel mult un punct.
- Funcţie pară: $f(-x) = f(x)$ (grafic simetric faţă de axa Oy).
- Funcţie impară: $f(-x) = -f(x)$ (grafic simetric faţă de origine).
- Patru modalităţi de a transforma graficul lui f(x):

$f(x)+c$	Graficul se deplasează vertical cu c unităţi.
$f(x+c)$	Graficul se deplasează orizontal cu c unităţi (la stânga dacă $c > 0$).
$k\,f(x)$	Graficul se măreşte vertical de k ori.
$f(kx)$	Graficul se măreşte orizontal de k ori.

1.1 Exerciţii

Chestiuni preliminare

1. Daţi exemple de numere a, b care să satisfacă relaţiile : $a < b$ şi $|a| > |b|$.
R. $a = -3, \qquad b = 1$

2. Care numere satisfac $|a| = a$? Care satisfac $|a| = -a$? Dar $|-a| = a$?
R. Numerele $a \geq 0$ satisfac $|a| = a$ şi $|-a| = a$. Numerele $a \leq 0$ satisfac $|a| = -a$.

3. Daţi exemple de numere a, b pentru care $|a+b| < |a| + |b|$.

R. $a = -3, b = 1$.

4. Care sunt coordonatele punctului aflat la intersecţia dintre dreptele $x = 9$ şi $y = -4$?
R. $(9, -4)$

5. Ce tip de simetrie posedă graficul funcţiei f(x) pentru care $f(-x) = -f(x)$?
R. Simetrie faţă de origine.

Exerciţii

1. Exprimaţi următoarele intergale sub formă de inegalităţi cu module:
a) $[-2, 2]$; **b**) $(0, 4)$; **c**) $[1, 5]$
R. ***a***) $|x| \leq 2$; ***b***) $|x-2| \leq 2$; ***c***) $|x-3| \leq 2$.

2. Scrieţi inegalitatea sub forma $a < x < b$, $\qquad a, b -$ fixe.
a) $|x| < 8$; **b**) $|2x+1| < 5$.
R. **a**) $-8 < x < 8$; **b**) $-3 < x < 2$.

3. Exprimaţi ca interval mulţimea numerelor care satisfac condiţia:
a) $|x| < 4$; **b)** $|x-4| < 2$; ***c)*** $|4x-1| < 8$.
R. **a)** $(-4,4)$; **b)** $(2,6)$; ***c)*** $\left[-\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$.

4. Descrieţi mulţimea indicată ca o reuniune de intervale finite sau infinite:
a) $\{ x : \ |x-4| > 2 \}$; **b)** $\{ x : \ ||x^2 - 1| > 2 \}$.
R. a) $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$; **b)** $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

5. Asociaţi inegalităţile (**a**) − (**f**) cu propoziţiile corespunzătoare (**i**) − (**vi**).
(**a**) $a > 3$; (**b**) $|a-5| < \frac{1}{3}$; (**c**) $\left|a - \frac{1}{3}\right| < 5$; (**d**) $|a| > 5$; (**e**) $|a-4| < 3$; (**f**) $1 < a < 5$.
(**i**) a se află în dreapta lui 3. (**ii**) a se află între 1 şi 7. (**iii**) Distanţa dintre a şi 3 este cel mult 2.
(**iv**) a este cu mai puţin cu 5 unităţi decât $\frac{1}{3}$.
R. (**a**) (i); (**b**) (iii); (**c**) (v); (**d**) (vi); (**e**) (ii); (**f**) (iv).

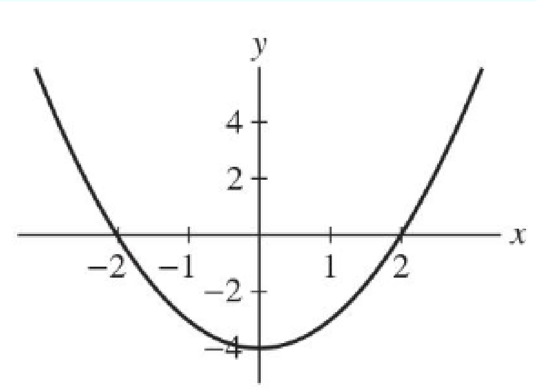
6. Demonstraţi că dacă $|a-5| < \frac{1}{2}$ şi $|b-8| < \frac{1}{2}$, atunci $|(a+b) - 13| < 1$.
R. Se utilizează inegalitatea triunghiului:

$$a + b - 13| = |(a-5) + (b-8)| \leq |a-5| + |b+8| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

7. Să presupunem că $|x-4| \leq 1$.
(**a**) Care este valoarea maximă a lui $|x+4|$? (**b**) Demonstraţi că $|x^2 - 16| \leq 9$.
R. (**a**) 9; (**b**) $|x^2 - 16| = |x-4| \cdot |x-4| \leq 1 \cdot 9 = 9$.

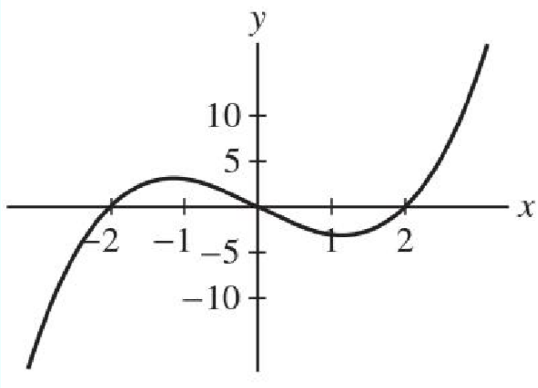
53. $Trasaţi\ graficele\ următoarelor\ funcţii$:
a) $f(x) = x^2 - 4$.
Type equation here.

Soluţie.
Funcţia are ca rădăcini 2 şi − 2,
este crescătoare pe $(0, \infty)$ şi descrescătoare
pe $(-\infty, 0)$ şi este funcţie pară
deci are graficul simetric faţă de Oy.

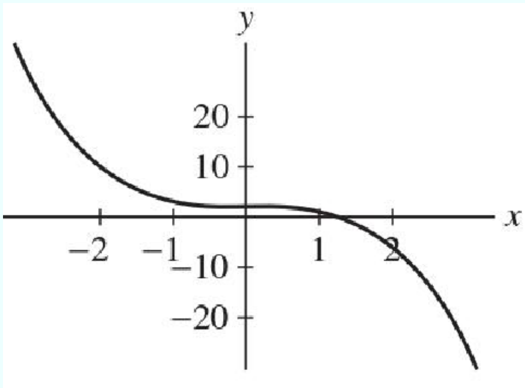


55

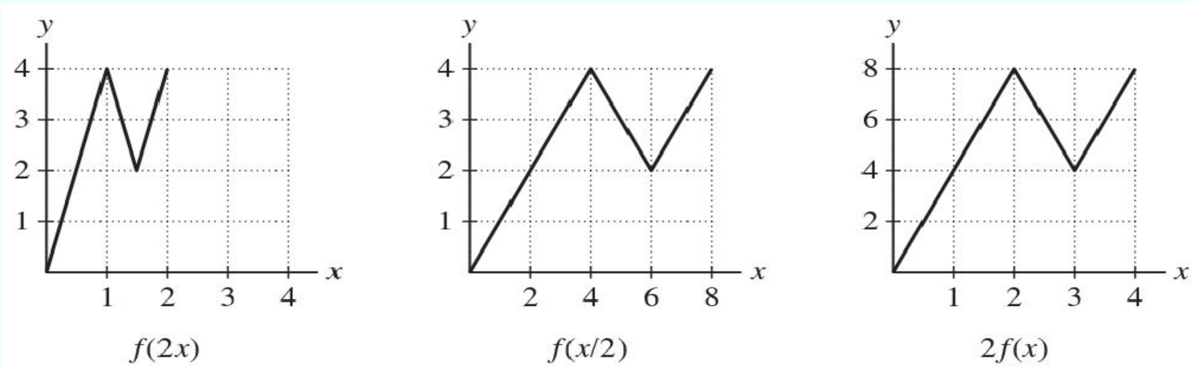
Soluţie.
Funcţia are ca rădăcini 0 şi ± 2,
este impară: $f(-x) = -f(x)$,
iar originea este punct de simetrie.



57
Soluţie.
Funcţia are ca rădăcină pe $\sqrt[3]{2}$,
este de fapt funcţia $g(x) = x^3$,
reflectat faţă de axa Ox şi mutat în sus.
cu 3 unităţi.



63.



Type equation here.

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

1.2 Funcţii liniare şi pătratice

Funcţiile liniare sunt cele mai simple funcţii, mai ales pentru faptul că graficele acestora sunt linii drepte.

$$\boxed{f(x) = mx + b \ \ (m \text{ şi } b \text{ constante})}$$

m este panta dreptei, iar b ordonata punctului în care aceasta intersectează axa Oy.

Utilizăm simbolurile Δx şi Δy pentru a nota variaţia variabilei x, respectiv y.
Conform fig. 1:

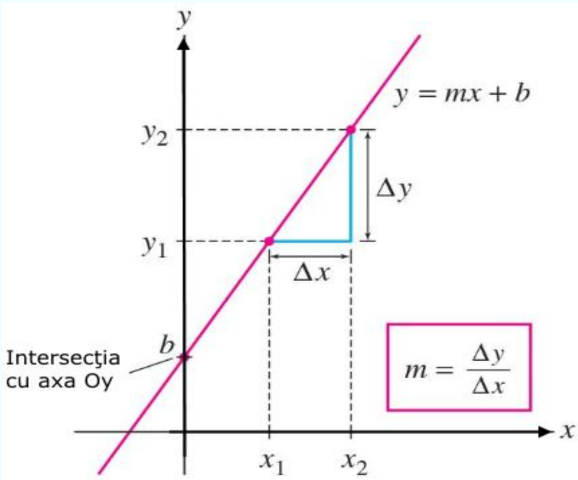


Fig. 1 Panta m este raportul dintre „creştere” şi „deplasare”.

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1 \,, \quad \Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)}$$

Panta m este raportul:

$$\mathrm{m} = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta x} = \frac{\textit{variaţia pe verticală}}{\textit{variaţia pe orizontală}} = \frac{\textit{urcare}}{\textit{deplasare}}\,.$$

Aceasta rezultă din formula $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{b}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(mx_2+b)-(mx_1+b)}{x_2-x_1}=\frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=m\,.$$

Aşadar, panta m măsoară raportul dintre variaţia lui y şi cea a lui x.
Acest lucru este foarte important în analiza matematică şi se va discuta mai pe larg în Secţiunea 2.1.

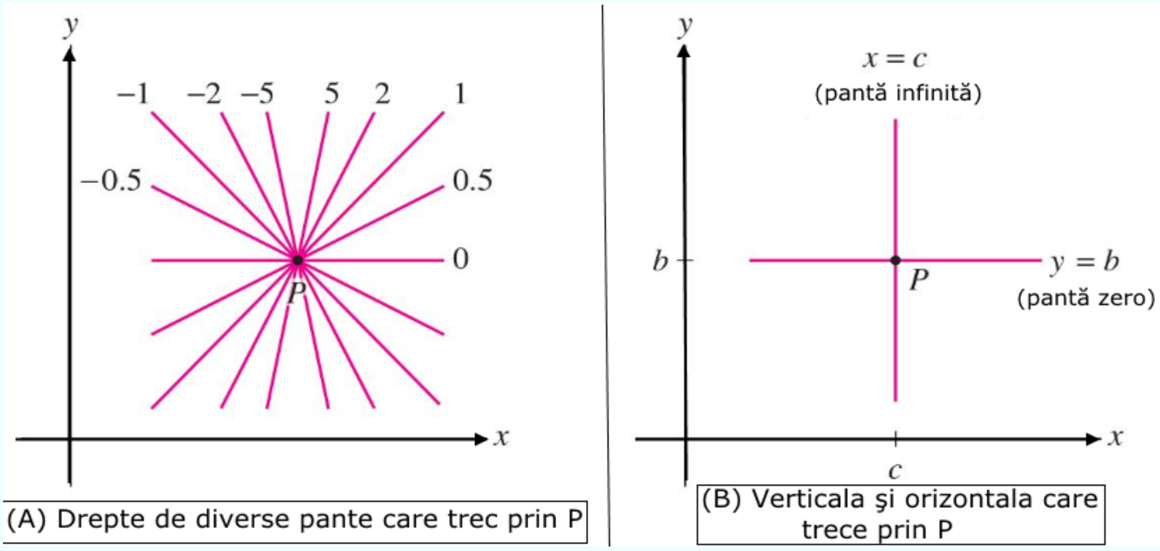


Fig. 2

Din punct de vedere grafic, m măsoară panta dreptei. În fig. 2(A)sunt prezentate drepte de diverse pante.

Reţineţi!
Graficele pot fi trasate pentru diferite scale ale axelor Ox şi Oy. *Dar dacă scalele sunt diferite. atunci liniile nu apar în pantele lor reale.*

Prin schimbarea scalei, se obţin diverse pante, un exemplu fiind ilustrat în fig. 3. , unde în partea de sus schimbările par mai spectaculoase.

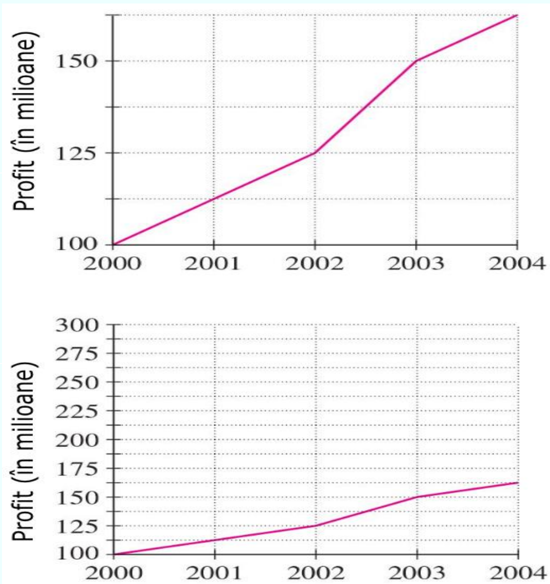


Fig. 3 Creşterea profitului unei companii.

Să reamintim proprietăţile pantelor liniilor paralele şi perpendiculare (fig. 4).

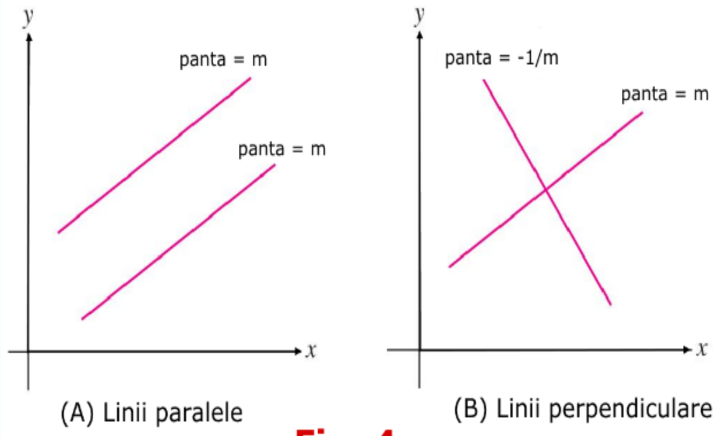


Fig. 4

- Liniile de pante m_1 şi m_2 sunt paralele dacă şi numai dacă $m_1 = m_2$.
- Liniile de pante m_1 şi m_2 sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ (sau $m_1 m_2 = -1$).

Cum s-a menţionat anterior, **ecuaţia liniar**ă are forma generală:

$$\boxed{ax + by = c\ .} \qquad (1)$$

unde a şi b nu sunt simultan nuli.
Pentru $b = 0$ se obţine ecuaţia dreptei verticale $ax = c$. Dacă $b \neq 0$, se poate rescrie (1) sub forma ecuaţiei explicite:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Alte două forme întâlnite frecvent sunt: ecuaţia dreptei care trece printr-un punct şi are o pantă dată şi ecuaţia dreptei care trece prin două puncte.

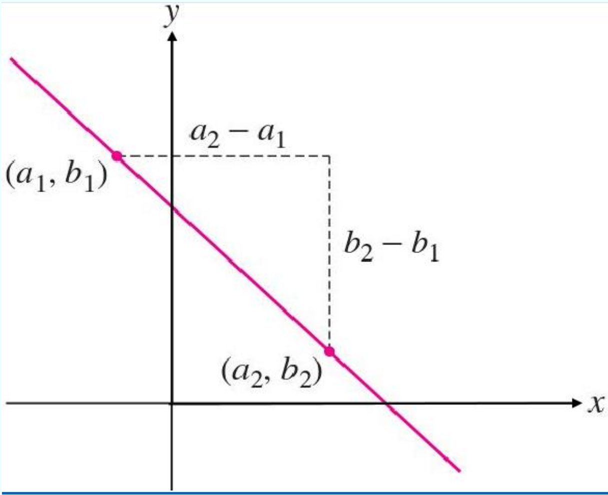


Fig. 5 Panta dreptei ce trece prin punctele $P\ (a_1, b_1)$ şi $Q(a_2, b_2)$ este $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$.

Panta dreptei ce trece prin punctele $P\ (a_1, b_1)$ şi $Q(a_2, b_2)$ (fig. 5) este

$$m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}.$$

Deci ecuaţia dreptei are forma: $y - b_1 = m(x - a_1)$.

Tipuri de ecuaţie a dreptei

1. care trece printr-un punct şi are o anumită pantă:
Dreapta care trece prin punctul $P(a, b)$ şi are panta m are ecuaţia:

$$\boxed{y - b = m(x - a)}$$

2. care trece prin două puncte:
Dreapta care trece prin punctele $P(a_1, b_1)$ şi $Q(a_2, b_2)$ are ecuaţia:

$$\boxed{y - b_1 = m(x - a_1)\ ,\ \ unde\ \ m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}}$$

■ **EXEMPLUL 1.** **Dreapta de o anumită pantă şi care trece printr-un punct dat.** Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $(9,2)$ cu panta $-\dfrac{2}{3}$ (fig. 6).

Soluţie. Din ecuaţia:

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-9)$$

se obţine forma explicită:

$$y=-\frac{2}{3}x+8.$$

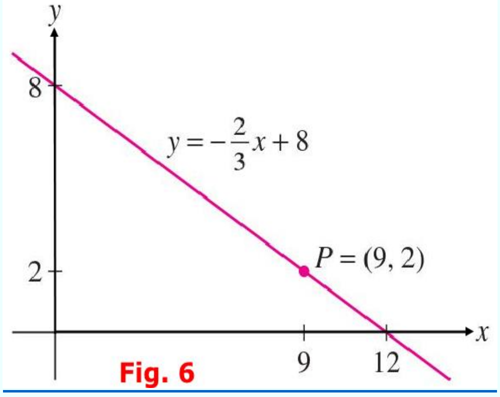


Fig. 6

■ **EXEMPLUL 2.** **Dreapta care trece prin două puncte.** Să se determine ecuaţia dreptei $\mathcal{L}$ care trece prin punctele $(2,1)$ şi $(9,5)$.

Soluţie. Dreapta $\mathcal{L}$ are panta

$$m=\frac{5-1}{9-2}=\frac{4}{7},$$

deci ecuaţia acesteia este: $y-5=\dfrac{4}{7}(x-9)$.

Concepte preliminare

Se pot defini variaţiile Δx şi Δy pe un interval $[x_1,x_2]$ pentru orice funcţie $f(x)$, dar, dacă funcţia nu este liniară, raportul celor două depinde de intervalul ales.

O caracteristică a funcţiei liniare $f(x)=mx+b$ este faptul că $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ are aceeaşi valoare m pentru orice interval (fig. 7). Cu alte cuvinte, y are o variaţie constantă faţă de x. Acesta este un mod de a verifica dacă două variabile sunt corelate printr-o relaţie liniară (v. Exemplul 3).

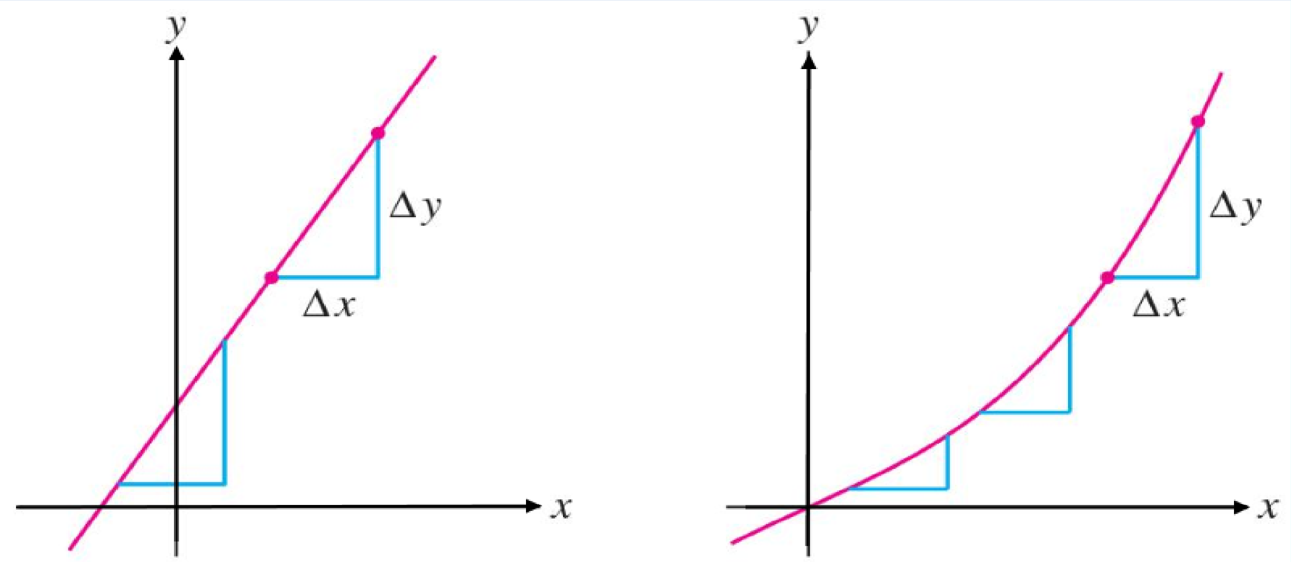


Fig. 7

Graficul unei funcţii liniare. Raportul $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ este acelaşi pe orice interval.	Graficul unei funcţii neliniare. Raportul $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se schimbă după intervalul ales.

■ **EXEMPLUL 3.** **Verificarea dependenţei liniare.**
Tabelul 1 indică valoarea P a presiunii unui gaz la diverse temperaturi T . Există o dependenţă liniară între cele două?

Soluţie. Calculăm raportul $\frac{\Delta P}{\Delta T}$ în diverse puncte şi vedem dacă acesta este constant:

(T_1, P_1)	(T_1, P_1)	$\frac{\Delta P}{\Delta T}$
$(70, 187,42)$	$(65, 189)$	$\frac{189-187{,}42}{75-70}=0{,}316$
$(75, 189)$	$(85;\ 192,16)$	$\frac{192{,}16-189}{85-75}=0{,}316$
$(85;\ 192{,}16)$	$(100;\ 196{,}9)$	$\frac{196{,}9-192{,}16}{100-85}=0{,}316$
$(100;\ 196{,}9)$	$(110;\ 200{,}06)$	$\frac{200{,}06-196{,}9}{110-100}=0{,}316$

Deoarece $\Delta P/\Delta T$ are valoare constantă şi anume 0,316 , rezultă că punctele se află pe o dreaptă cu panta $m = 0{,}316$. Deoarece dreapta trece prin punctul $(70;\ 187{,}42)$, rezultă că ecuaţia acesteia este:

$$P - 187{,}42 = 0{,}316\,(T - 70).$$

TABEL 1

Temperatură °F	Presiune lb/in^2
70	187,42
75	189
85	192,16
100	196,9
110	200,06

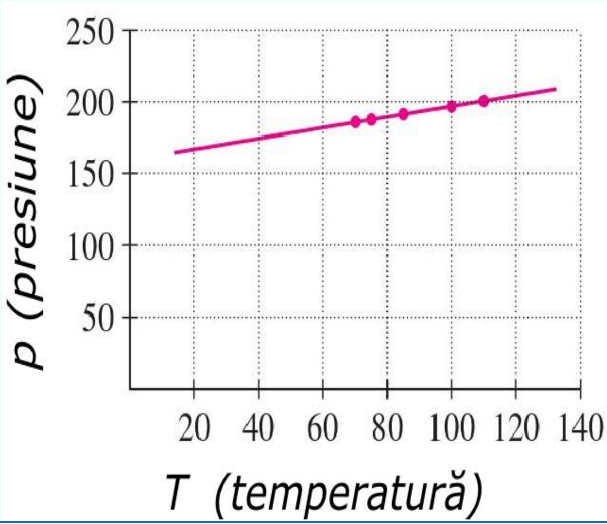


Fig. 8 Linia care uneşte punctele presiune – temperatură.

O **funcţie de gradul al doilea** este o funcţie definită prin polinomul pătratic:
$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c$ – constante cu $a \neq 0)$
Graficul lui f este o **parabol**ă (fig. 9). Parabola se deschide în sus dacă $a > 0$ şi în jos dacă $a < 0$.
Discriminantul lui f(x) este: $\Delta = b^2 - 4ac$.

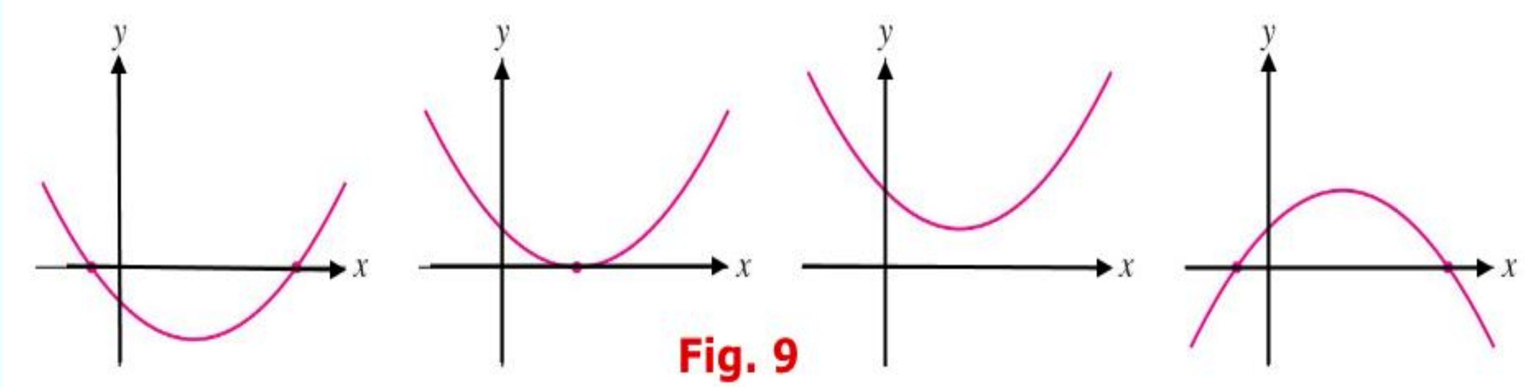


Fig. 9

Două rădăcini reale	Rădăcină dublă	Fără rădăcini reale	Două rădăcini reale
$a > 0$ şi $\Delta > 0$.	$a > 0$ şi $\Delta = 0$	$a > 0$ şi $\Delta < 0$	$a < 0$ şi $\Delta > 0$

Rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt date de (v. Exerciţiul 56):

Rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sunt date de:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Semnul lui Δ determină dacă $f(x) = 0$ are sau nu rădăcini reale ((fig. 9). Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale, iar dacă $\Delta = 0$, atunci are o singură rădăcină (*rădăcină dublă*).
Dacă $\Delta < 0$, atunci $\sqrt{\Delta}$ este imaginar și ecuația nu admite rădăcini reale.
Dacă $f(x) = 0$ are două rădăcini reale r_1 și r_2 , atunci putem scrie: $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

De exemplu, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ are ca discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, deci rădăcinile sunt: 1 și $\frac{1}{2}$.

Deci: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Metoda completării unui pătrat perfect constă în scrierea polinomului de gradul al doilea ca multiplu al unui pătrat plus o constantă:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \; . \qquad (2)$$

EXEMPLUL 4. **Completarea unui pătrat perfect.**
Completați pătratul perfect pentru polinomul $4x^2 - 12x + 3$.

Soluție. $4x^2 - 12x + 3 = 4\left(x^2 - 3x + \frac{3}{4}\right)$.

Apoi se completează pătratul perfect pentru termenul $x^2 - 3x$:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}, \quad x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Deci: $4x^2 - 12x + 3 = 4\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6$.

Metoda completării pătratului este utilizată pentru aflarea maximului sau minimului unei funcții pătrate.

EXEMPLUL 5. **Determinarea minimului unei funcții pătratice.**
Completați pătratul perfect și determinați valoarea minimă a funcției:
$f(x) = x^2 - 4x + 9$.

Soluție. Avem:
$f(x) = (x - 2)^2 - 4 + 9 = (x - 2)^2 + 5$.
Dar $(x - 2)^2 \geq 0$, deci valoarea minimă este:
$f(2) = 5$ (fig. 10).

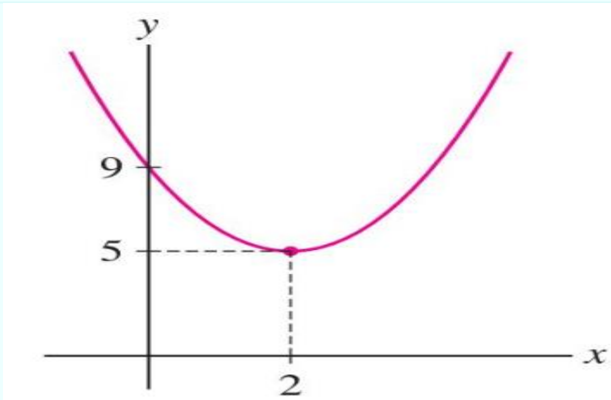


Fig. 10 *Graficul funcției* $f(x) = x^2 - 4x + 9$

1.2 Sumar

- O funcţie de forma $f(x) = mx + b$ se numeşte funcţie liniară.
- Ecuaţia generală a unei drepte este $ax + by = c$. dreapta $y = c$ este orizontală iar $x = c$ este verticală.
- Există trei modalităţi de a scrie ecuaţia unei drepte care nu este verticală:
  - forma explicită: $y = mx + b$ $\left(\text{panta } m \text{ şi axa } Oy \text{ este intersectată în } (0, b)\right)$.
  - ecuaţia dreptei care trece printr-un punct (a, b)şi are o pantă dată m : $y - b = m(x - a)$.
  - ecuaţia dreptei care trece prin două puncte, $P_1\ (a_1, b_1)$şi $P_2(a_2, b_2)$: $y - b_1 = m(x - a_1)$, unde $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ este panta dreptei.
- Două drepte de pante m_1 şi m_2 sunt paralele dacă şi numai dacă $m_1 = m_2$; acestea sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $m_1 m_2 + 1 = 0$.
- Rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ sunt date de $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul. Mai departe, $f(x) = 0$ are rădăcini reale şi distincte dacă $\Delta > 0$, o rădăcină dublă dacă $\Delta = 0$ şi nicio rădăcină reală dacă $\Delta < 0$.
- Metoda completării pătratului constă în scrierea funcţiei de gradul al doilea ca multiplu al unui pătrat plus o constantă.

1.3 Exerciţii

Chestiuni preliminare

1. Care este panta dreptei $y = -4x - 9$?.
R. -4

2. Sunt perpendiculare liniile $y = 2x + 1$ şi $y = -2x - 4$?.
R. Nu.

3. Când este paralelă cu Oy dreapta de ecuaţie $ax + by + c = 0$? Dar cu Ox ?
R. Paralelă cu Ox când $a = 0$ şi cu Oy când $b = 0$.

4. Dacă $y = 3x + 2$, care este Δy dacă x creşte cu 3 ? .
R. $\Delta y = 9$.

5. Care este minimul lui $f(x) = (x + 3)^2 - 4$?
R. -4

6. Completaţi un pătrat perfect pentru $f(x) = x^2 + 1$.
R. $(x - 0)^2 + 1$

Exerciţii

1. Determinaţi panta şi intersecţiile cu Ox şi cu Oy pentru dreptele:
a) $y = 3x + 12$; **b**) $4x + 9y = 3$.

R. ***a***) $m = 3, y = 12, x = -4$ ***b***) $m = -\frac{4}{9},\ y = \frac{1}{3}\ ,\ x = \frac{3}{4}$

2. Determinaţi pantele dreptelor:
a) $y = 3x + 2$; **b**) $3x + 4y = 12$.

R. **a**) $m = 3$; **b**) $m = -\frac{3}{4}$.

9.
$R.\ y = 3x + 8$

11.
$y = 3x - 12$
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

1.3 Funcţii elementare

Sunt foarte multe tipuri de funcţii. Pentru început, ne vom ocupa de cele elementare:

Funcţii polinomiale	Funcţii raţionale	Funcţii algebrice
Funcţii exponenţiale	Funcţii trigonometrice	

- **Funcţia polinomial**ă: Pentru orice număr real m, funcţia $f(x) = x^m$ se numeşte **funcţia putere** de exponent m.
Funcţia polinomială este suma mai multor funcţii putere cu exponenţi naturali (fig. 1):

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x, \qquad g(x) = 7t^6 + t^3 - 3t - 1$$

Astfel, funcţia $f(x) = x + x^{-1}$ nu este polinomială deoarece x^{-1} are exponent negativ.

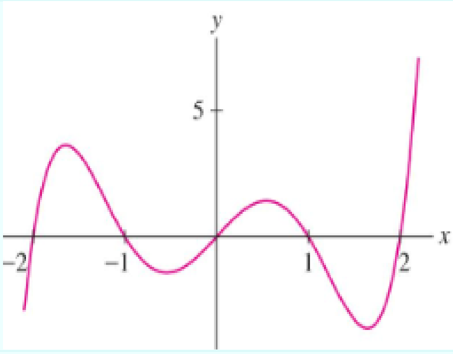


Fig. 1 Funcţia polinomială
$y = x^5 - 5x^3 + 4x$

Forma generală a unei funcţii polnomiale de variabilă x este:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- Numerele $a_0, a_1, \dots, a_n$ se numesc coeficienţi.
- Gradul lui $P(x)$ este n (presupunând că $a_n \neq 0$).
- Coeficientul lui a_n se numeşte **coeficient principal**.
- Domeniul de definiţie al lui $P(x)$ este $\mathbb{R}$.

● **Funcţia raţională**: Funcţia raţională este *raportul* a două polinomiale (fig. 2):

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad \text{unde } P(x) \text{ şi } Q(x) \text{ sunt două polinomiale.}$$

Orice funcţie polinomială este şi funcţie raţională (cu $Q(x) = 1$). Domeniul de definiţie al funcţiei raţionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ este mulţimea de numere x pentru care $Q(x) \neq 0$.

Exemple:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, domeniu de definiţie $\{x \in \mathbb{R} : \; x \neq 0\}$

$h(t) = \frac{7t^6 + t^3 - 3t - 1}{t^2 - 1}$, domeniu $\{x \in \mathbb{R} : \; x \neq \pm 1\}$

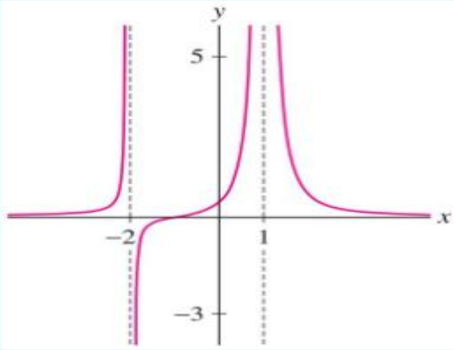


Fig. 2 Funcţia raţională

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 3x + 2}$$

● **Funcţia algebrică**: O funcţie algebrică se obţine prin suma, produsul sau *rădăcina* unor funcţii polinomiale sau raţionale (fig. 3).

Exemple:

$f(x) = \sqrt{1 + 3x^2 - x^4}$, $\qquad g(t) = \left(\sqrt{t} - 2\right)^{-2}$,

$h(z) = \frac{z + z^{-\frac{5}{3}}}{5z^3 - \sqrt{z}}$.

Un număr x aparţine domeniului de definiţie dacă f este definită pentru acel x şi rezultatul nu implică o împărţire cu zero.

De exemplu $g(t)$ este definită dacă $t \geq 0$ şi $\sqrt{t} \neq 2$, deci domeniul de definiţie este în acest caz: $D = \{ x \in \mathbb{R} : \; t \geq 0 \text{ şi } t \neq 4 \}$.

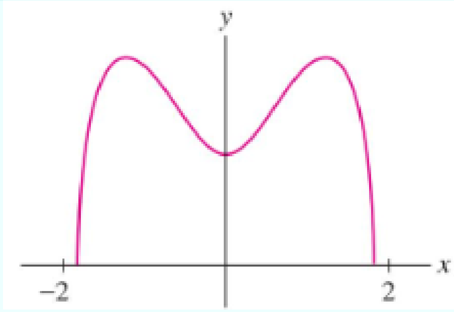


Fig. 3 Funcţia algebrică

$$f(x) = \sqrt{1 + 3x^2 - x^4}$$

Funcţiile algebrice pot fi definite ca ecuaţii polinomiale între x şi y. În acest caz spunem că y este **definit implicit** în raport cu x. De exemplu ecuaţia $y^4 + 2x^2y + x^4 = 1$ defineşte y ca o funcţie implicită de x.

● **Funcţia exponenţială**: O funcţie de tip $f(x) = b^x$, unde $b > 0$, este numită funcţie exponenţială de bază b.

Câteva exemple:

$y = 2^x$, $\qquad y = 10^x$, $\qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\qquad y = \left(\sqrt{5}\right)^x$.

Funcţiile exponenţiale şi *inversele* acestora, **funcţiile logaritmice**, vor fi studiate în detaliu în Secţiunea 1.6.

● **Funcţia trigonometrică**: Funcţiile construite pornind de la $\sin x$ şi $\cos x$ sunt numite funcţii trigonometrice. Vor fi studiate ulterior.

O funcţie care nu este algebrică se numeşte *transcendentală*. Astfel de funcţii sunt funcţiile trigonometrice şi exponenţiale. Alte funcţii transcendentale, cum ar fi *gamma* a lui BESSEL, apar în aplicaţii din fizică, tehnică şi statistică.

Cuvântul *transcendental* a fost introdus către sfârşitul secolului al XVII-lea de către GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ.

Operaţii cu funcţii

Dacă f şi g sunt funcţii, se pot obţine noi funcţii efectuând suma, diferenţa, produsul sau raportul acestora:

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(\mathrm{f}\cdot\mathrm{g})(\mathrm{x}) = f(x)\cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\text{, unde } \mathrm{g}(\mathrm{x}) \neq 0\,.$$

De exemplu, dacă $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = x^2$ şi $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \sin x$, atunci:

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = x^2 + \sin x\,, \quad (f-g)(x) = x^2 - \sin x\,, \quad (\mathrm{f}\cdot\mathrm{g})(\mathrm{x}) = x^2 \sin x\,, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sin x}.$$

Un alt mod de a obţine funcţii noi este înmulţirea funcţiilor cu o constantă. O funcţie de forma:

$$\mathrm{c}_1 f(x) + c_2 g(x), \quad (c_1, c_2 - \text{constante})$$

se numeşte **combinaţie liniară** a funcţiilor f(x) şi g(x) .

Compunerea funcţiilor reprezintă o altă modalitate de construcţie a noi funcţii.
Compunerea funcţiilor f şi g este funcţia $\mathrm{f}\circ\mathrm{g}$ definită prin $(\mathrm{f}\circ\mathrm{g})(\mathrm{x}) = f\big(g(x)\big)$, definită pentru acele valori ale lui x din domeniul de definiţie al lui g pentru care $g(x)$ se află pe domeniul lui f.

EXEMPLUL 1. Să se scrie funcţiile compuse $f\circ g$ şi $g\circ f$ şi să se determine domeniile de definiţie, unde:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{x}\,, \quad g(x) = 1 - x\,.$$

Soluţie. Avem:

$$(f\circ g)(x) = f\,(1-x) = \sqrt{1-x}\,.$$

Rădăcina pătrată $\sqrt{1-x}$ este definită pentru $1 - \mathrm{x} \geq 0$ sau $\mathrm{x} \leq 1$, deci domeniul de definiţie al lui $f\circ g$ este $\{\mathrm{x}: \ \mathrm{x} \leq 1\}$.
Compunerea inversă:

$$(g\circ f)(x) = g\big(\sqrt{x}\big) = 1 - \sqrt{x}\,.$$

Domeniul lui $g\circ f$ este $\{\mathrm{x}: \ \mathrm{x} \geq 0\}$.

Observaţie: Compunerea a două funcţii *nu* este comutativă. Astfel, în exemplul anterior se vede că:

$$f\circ g \neq g\circ f\,.$$

Funcţii elementare

Au fost trecute în revistă câteva din funcţiile de bază ale matematicii.
Alte funcţii pot fi obţinute prin operaţii de adunare, multiplicare, diviziune, compunere, extragere de rădăcină sau de inversă a funcţiilor. Toate acestea sunt **funcţii elementare**. Exemple:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{2x + \sin x}\,, \qquad f(x) = 10^{\sqrt{x}}\,, \qquad f(x) = \frac{1 + x^{-1}}{1 + \cos x}$$

1.3. Sumar

- Pentru orice număr real m, funcţia $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = x^m$ este funcţia putere de exponent m. Funcţia polinomială $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ este suma unor funcţii putere de tip x^{m}, unde $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$, înmulţite cu constante:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,.$$

Gradul polinomului este n (se presupune că $\mathrm{a}_{\mathrm{n}} \neq 0$), iar a_{n} este numit coeficient principal.

- O funcţie raţională este raportul $P(x)/Q(x)$ a două polinomiale.
- O funcţie algebrică se obţine prin suma, produsul şi rădăcina de ordinul n a unei funcţii polinomiale sau raţionale.
- Funcţia exponenţială: $\mathrm{f(x)} = b^x$, unde $\mathrm{b} > 0$ este numită bază.
- Funcţia compusă $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$ este definită prin $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x}) = f(g(x))$. Domeniul de definiţie al lui $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$ este mulţimea acelor x din domeniul lui g pentru care $\mathrm{g(x)}$ aparţine domeniului lui f.

1.3. Exerciţii

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

1.4. Funcţii trigonometrice

Începem recapitularea problematicii legate de trigonometrie amintind că există două sisteme de măsurare a unghiurilor: în **grade** şi în **radiani**.
Se va utiliza litera grecească θ pentru a nota unghiul de rotaţie.

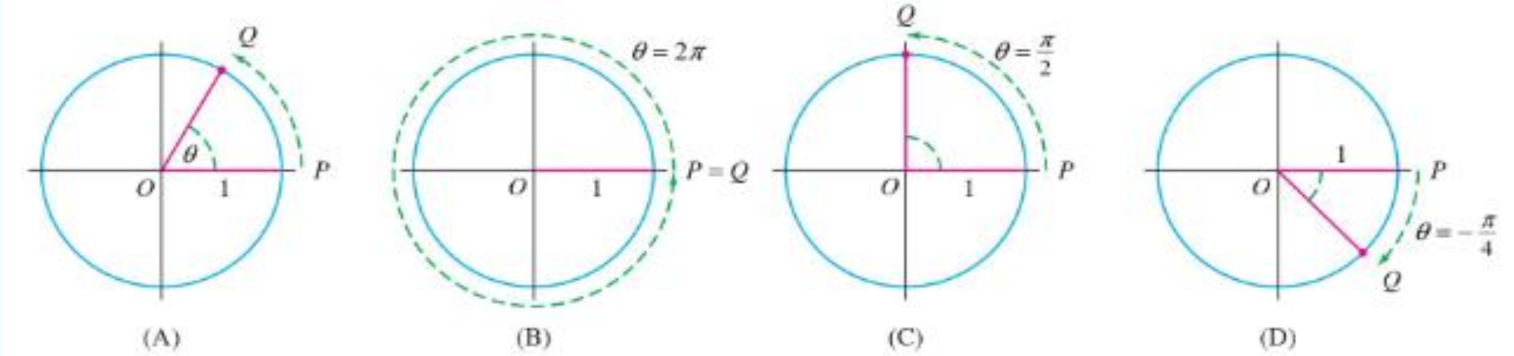


Fig. 1 Măsura în radiani a unghiului θ, măsurat în sens antiorar, este lungimea arcului de cerc parcurs de P pentru a ajunge în Q.

Fig. 1(A) prezintă cercul unitate cu raza $\overline{OP}$, care se roteşte în sens trigonometric (invers acelor de ceas) şi devine $\overline{OQ}$.
Unghiul de rotaţie θ *, măsurat în radiani, este lungimea arcului de cerc parcurs de* P *pentru a ajunge în* Q.
Cercul unitate are circumferinţa 2π. Deci o rotaţie de-a lungul unui cerc întreg are un unghi $\theta = 2\pi$ (fig. 1(B)).
Pentru un sfert de cerc $\theta = \frac{\pi}{2}$ (fig. 1(C)) şi, în general, pentru o rotaţie de $1/n$ dintr-un cerc, $\theta = 2\pi/n$ (Tabelul 1).
O rotaţie negativă, cu $\theta < 0$, este o rotaţie în sensul acelor ceasului (fig. 1(D)).

TABEL 1

Unghi de rotate	Maura în radiani
Două cercuri	4π
Un cerc întreg	2π
Un semicerc	π
Un sfert de cerc	$\pi/2$
1/6 din cerc	$\pi/3$

Pe un cerc de rază r, *arcul parcurs printr-o rotaţie de* θ *radiani, are lungimea* θr (Fig. 2).
Acum să considerăm unghiul ∠POQ din fig. 1(A). Măsura acestuia este dată de măsura unghiului de rotaţie care aduce $\overline{OP}$ în $\overline{OQ}$.
Trebuie să remarcăm faptul că orice proces de rotaţie are propria sa măsură în radiani care poate depăşi 2π dacă cercul este parcurs de mai multe ori.
De exemplu, θ şi $\theta + 2\pi$ reprezintă acelaşi unghi.
Aşadar, *două unghiuri coincid dacă sunt corelate unor rotaţii care diferă cu un multiplu întreg de* 2π.

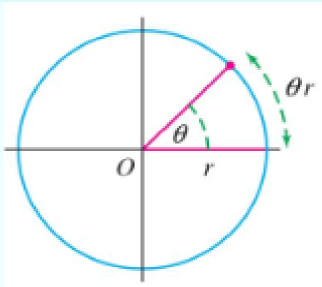


Fig. 2 Pe cercul de rază r, arcul parcurs are lungimea θr.

De exemplu, unghiul $\pi/4$ poate fi reprezentat atât ca $9\pi/4$, cât şi ca $-15\pi/4$ deoarece:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} - 2\pi = -\frac{15\pi}{4} + 4\pi$$

Orice unghi are o măsură unică θ în radiani care satisface: $0 \le \theta < 2\pi$.
Cu această convenţie, unghiul subîntinde un arc de lungime θr.

Radiani	Grade
0	0°
π/6	30°
π/4	45°
π/3	60°
π/2	90°

Pentru convertirea grade – radiani (şi invers), se va ţine seama că la 360° corespund π radiani:

- Pentru transformarea radianilor în grade, se face multiplicarea cu 180/π.
- Pentru transformarea gradelor în radiani, acestea se înmulţesc cu π/180.

■ **EXEMPLUL 1.** Să se transforme: (**a**) 55° în radiani şi (**b**) 0,5 radiani în grade.

Soluţie. (**a**) $55° \times \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}9599\, rad$; (**b**) $0{,}5\, rad \times \dfrac{180}{\pi} \approx 28{,}648°$.

Convenţie: Dacă nu există altă precizare, unghiurile vor fi date în radiani.

Funcţiile trigonometrice $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ sunt definite cu ajutorul triunghiurilor dreptunghice.
Astfel, în fig. 3:

$$\sin\theta = \frac{b}{c} = \frac{cateta\ opusă}{ipotenuză}\ ,\quad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{cateta\ alăturată}{ipotenuză}$$

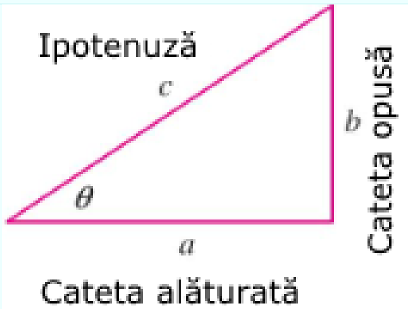


Fig. 3

Un dezavantaj al acestor definiţii îl constituie faptul că au sens numai pentru unghiuri cuprinse între 0 şi π/2. Cu ajutorul cercului trigonometric (cercul cu rază unitară) putem extinde aceste definiţii pentru orice unghi. Fie P(x, y) un punct de pe cercul unitar căruia îi corespunde unghiul θ (fig. 4(A)). Definim:
$\cos\theta = abscisa\ lui\ P$, $\sin\theta = ordonata\ lui\ P$.

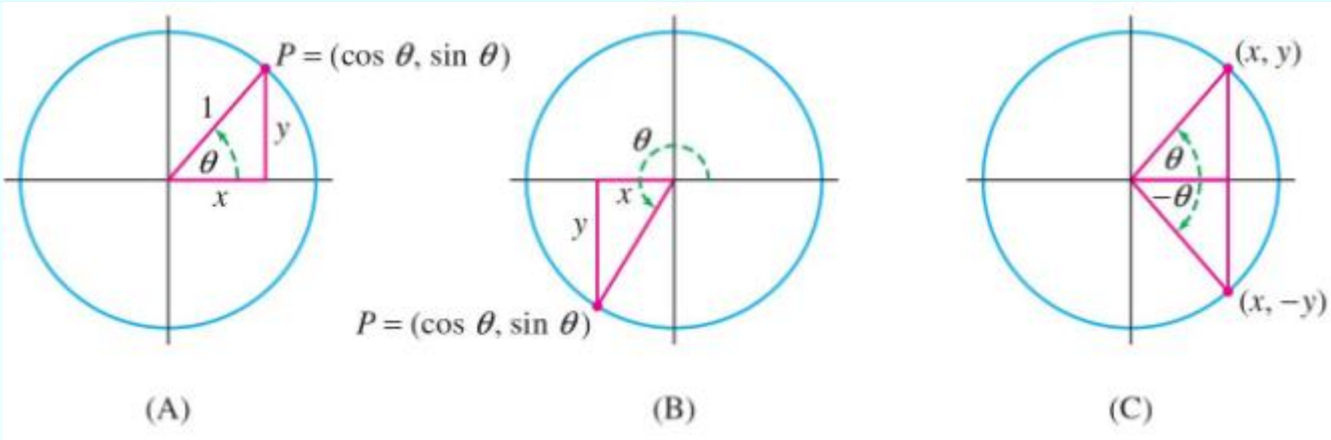


Fig. 4 Definirea funcţiilor trigonometrice cu ajutorul cercului unitar.

Se vede că pentru $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este satisfăcută definiţia clasică.
Mai departe, pe fig. 4(C) se vede că $\sin\theta$ este funcţie impară şi că $\cos\theta$ este pară:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta\ ,\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Valorile funcţiilor trigonometrice se obţin cu calculatorul, dar anumite unghiuri standard trebuie memorate deoarece apar mai des în calcule (fig. 5 şi Tabelul 2).

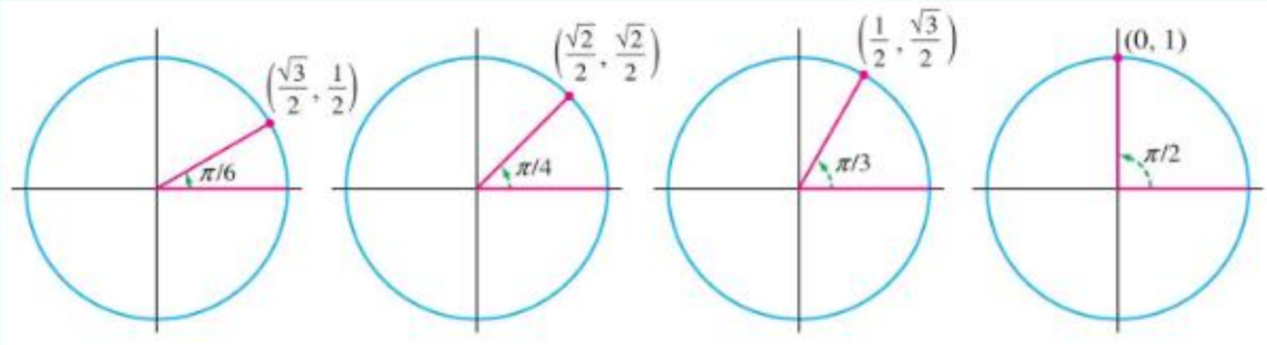


Fig. 5 Patru unghiuri standard, ale căror funcţii trigonometrice trebuie memorate.

TABEL 2

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

În fig. 6 este prezentat graficul funcţiei sinus, care este o *sinusoidă*.
Graficul funcţiei cosinus are formă identică, dar este defazat la stânga cu π/2 (fig. 7).

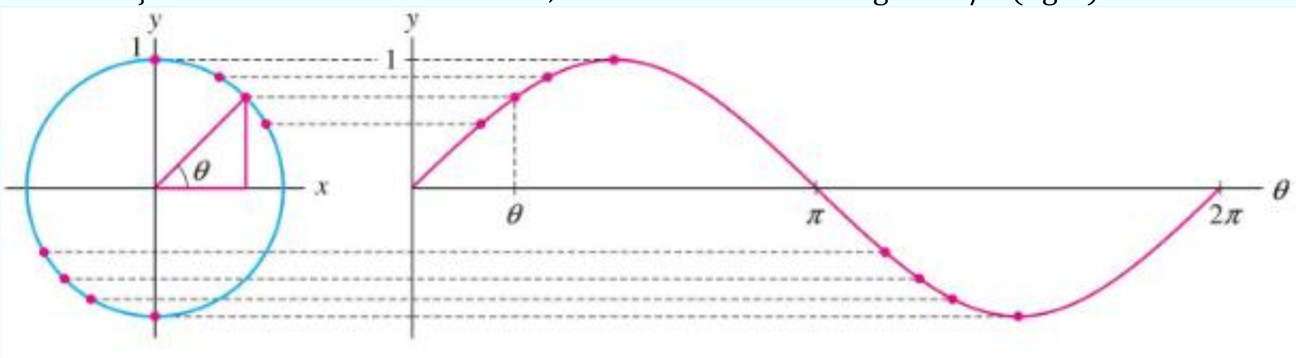


Fig. 6 Graficul funcţiei y = sin θ

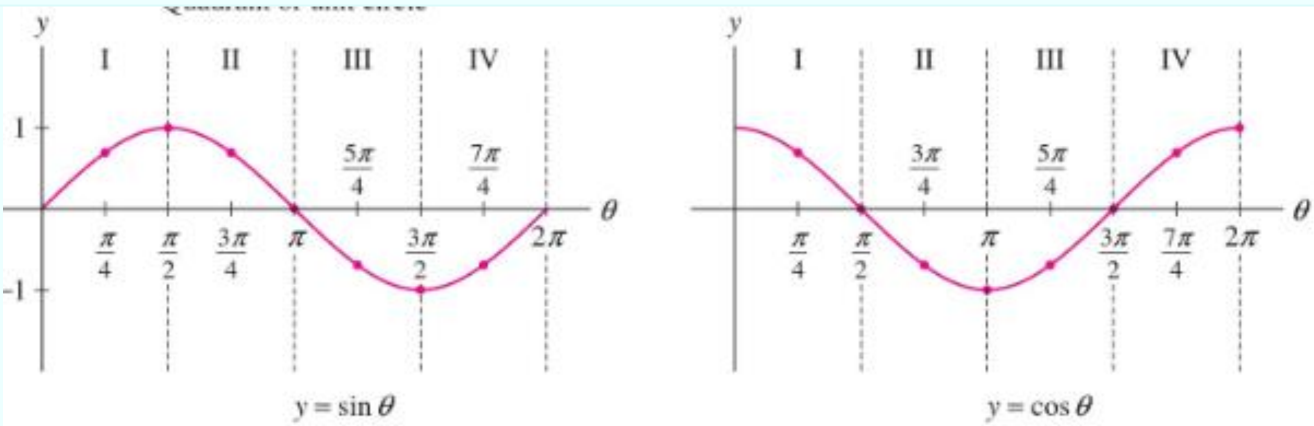


Fig. 7 Graficele funcţiilor y = sin θ şi y = cos θ pentru primele patru sferturi ale cercului trigonometric (pentru perioada 2π).

O funcţie f(x) se numeşte **periodică** cu perioada T dacă $f(x + T) = f(x)$ pentru orice x, iar T este cel mai mic număr pozitiv cu această proprietate.
Funcţiile sinus şi cosinus sunt periodice cu perioada 2π şi aceasta deoarece dacă două unghiuri diferă printr-un multiplu întreg $2k\pi$, acestea corespund aceluiaşi punct pe cercul trigonometric (fig. 8).

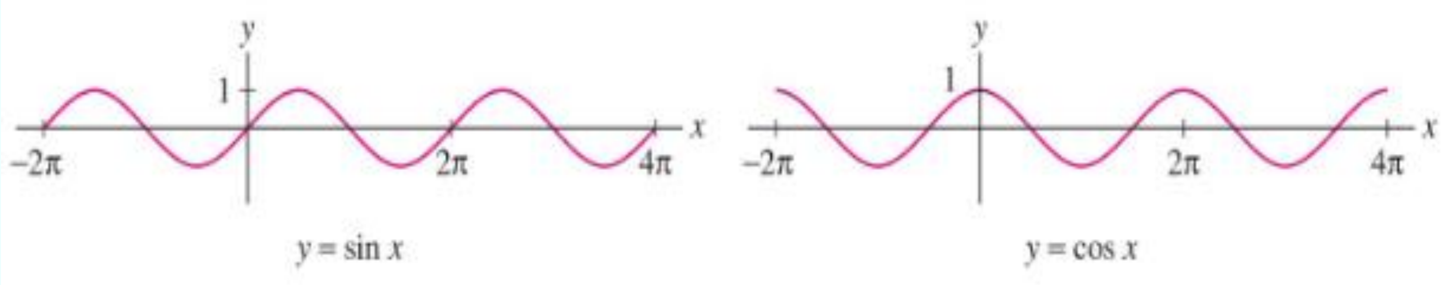


Fig. 8 Funcţiile sinus şi cosinus au perioada 2π.

Să amintim alte patru funcţii trigonometrice, definite cu ajutorul funcţiilor sinus şi cosinus (fig. 9):

$$\text{tangentă: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{a}, \quad \text{cotangentă: } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{a}{b},$$
$$\text{secantă: } \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{c}{a}, \quad \text{cosecantă: } \csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{c}{b}$$

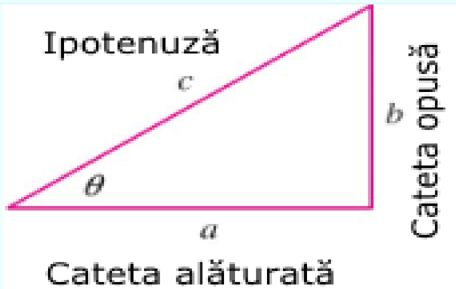


Fig. 9

Şi aceste patru funcţii sunt periodice (fig. 10). Astfel, tangenta şi cotangenta au perioada π, iar secanta şi cosecanta au perioada 2π (v. ex.) **?**

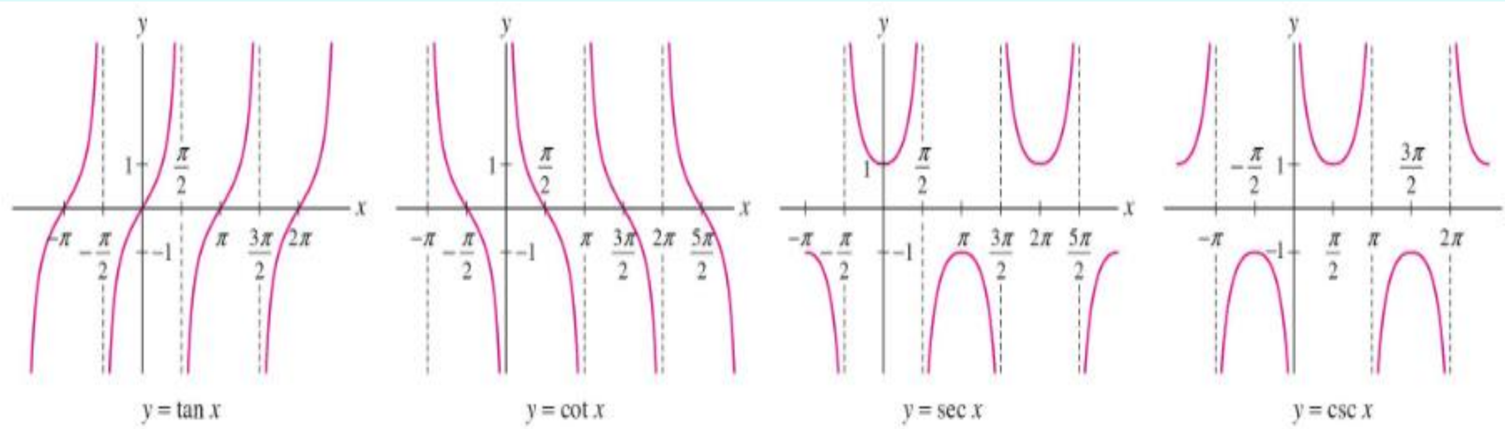


Fig. 10 Graficele funcţiilor tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă.

■ **EXEMPLUL 2.** **Valori ale funcţiilor trigonometrice compuse.** Să se determine valorile tuturor celor şase funcţii trigonometrice pentru $x = 4\pi/3$.

Soluţie. Punctul P de pe cercul unitar care corespunde unghiului x=4π/3 se opune unghiului π/3 (fig. 11). Utilizând tabelul 2:

$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă:

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}, \qquad \cot\frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\frac{4\pi}{3} = -2, \qquad \csc\frac{4\pi}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

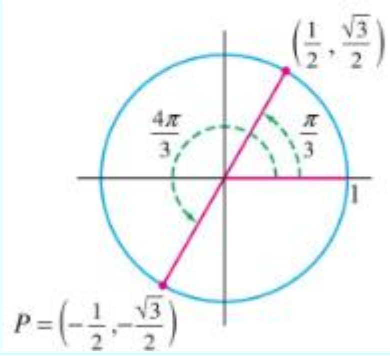


Fig. 11

■ **EXEMPLUL 3.** Să se determine unghiurile x pentru care $\sec x = 2$.

Soluţie. Deoarece $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, trebuie să rezolvăm ecuaţia $\cos x = \frac{1}{2}$.

În fig. 12 se vede că $x = \frac{\pi}{3}$ *şi* $x = -\frac{\pi}{3}$ sunt soluţii.

Deci soluţiile ecuaţiei sunt: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

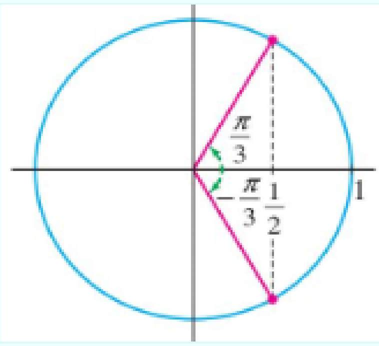


Fig. 12 ...

■ **EXEMPLUL 4.** Să

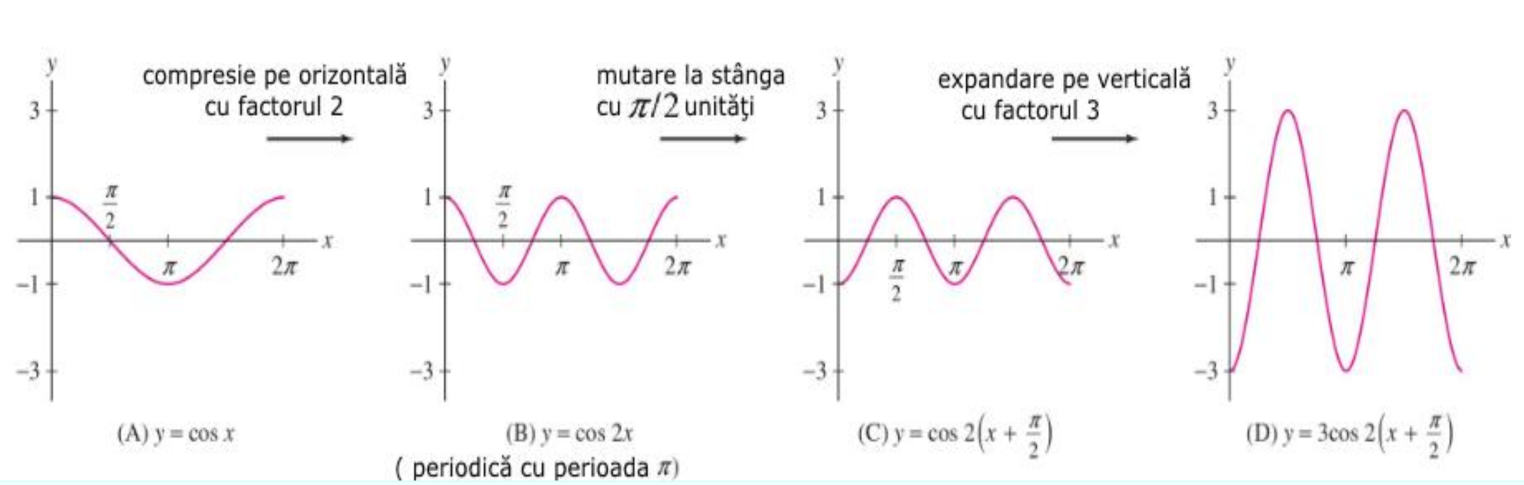


Fig. 13 ...

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

$Text$		(1)

Fig. 8 ...

http://atomurl.net/dynamicicon/

http://atomurl.net/math/

$\uparrow$
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
$\downarrow$

Fig. n ....

Simboluri

$\overline{abc}$ $\vec{v}$ $\dot{a}$ $\ddot{a}$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ $\sqrt{\ ^2+\ ^2}$ $\sqrt{\ }$ $-$ - $\widehat{abc}$ $\widetilde{abc}$ $\not\subset$ $\not\supset$

Mulţimi

$\subset \subseteq \not\supseteq \cup \cap \in \notin \ni \emptyset$

Mulţimi de numere

$\mathbb{N}\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{R}\ \overline{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$

Alfabetul grec

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \epsilon\ \theta\ \vartheta\ \upsilon\ \lambda\ \mu\ \pi\ \rho\ \sigma\ \varsigma\ \tau\ \varphi\ \omega$ Α Β Γ Δ Ε Θ Η Λ Μ Ν Π Ρ Σ Τ Φ Χ Ψ Ω

Semne algebrice: $\sim \mp \cong \ll \gg \neq \equiv \approx \pm \times \leq \geq$

Sumă, produs, integrală

$$\sum\ \sum\ \sum\ \sum\ \sum\ \prod\ \prod\ \prod\ \prod\ \int\ \int$$

$$\int\ \int\ \int\ \int\ \iint\ \oint\ \oiint\ \oiiint\ ⨍$$

Funcţii trigonometrice

$\sin$ $\cos$ $\tan$ $\csc$ $\sec$ $\cot$ $\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$ $\tan^{-1}$

$\lim$ $\ln$ ∂

Alte simboluri

Δ ∇ ← ↑ → ↓ ↔ ↦ ∗ · ⋮ ⋯ ⋰ ⋱ א ב ■ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\frac{\partial y}{\partial x}$ $\frac{\delta y}{\delta x}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

℮ @

≝ C_n^kType equation here. $\bar{\mathbb{R}}$

\+ < = > | ~ ¬ ± × ÷ ∍ / ℘ ∑ ⅁ ⅂ ⅃ ⅄ ⅋

← ↑ ↓ → ↔ ↚ ↛ ↠

⊗ ⊘ ⊙ ⊚ ⊛ ⊞ ⊠ ⊟ ⊡ ⊢ ⊣ ⊤ ⊥

∂ δ ⇐

⇐ ⇑ ⇒ ⇓ ⇔ → ➞ ➡ ➧ ⟲ ⟳ ⟸ ⟹ ⟺ — – | ‾

\- - 🐀 🐎 🐘 🐟 🐦 🕊 🐬 ☕ 🍎 🍏 🍴 🍷 👓 ☺ ☹ 😀 😌 🐯 🐵 ⚽ 🏃 🏆

✈ 🚃 🚆 🚌 🚕 ☀ 🏝 🌷 ✿ ✿ 🍁 ❀ ★ ☆ ✢ ✤ ✦ ✫ ✯

✴ ✷ ✹ ❁ ℤ ℚ ℝ

■ □ ▣ ▪ ▫ ▲ ▸ ◉ ● ◦ ○

☮ ☯ ☸ ✞ ✠ ✡

∊ ∈ ∋ ∍ ∠ ∡ ∢ ∤ ‖a‖ ‖ ∦ ∧ ∨ ∮ ∮ ≃ ≈ ≋ ≝ ≡

≪ ≫ < > ⊆ ⊇ ⋘ ⋙ ⟨ ⟩ ⟨ ⟩ ⊕ ⊗ ≫

§ • $^{0}{}_{0\ 1\ 2\ 3}{}^{4\ 5\ 6\ 7}$ ♯

$$x_n = \begin{cases} x'_{k+1} & pentru\, n = 2k \\ x''_{k+1} & pentru\, n = 2k + 1 \end{cases}$$

Diacritice corecte: Ș ș Ț ț

$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

$$E = mc^2$$

$\boldsymbol{E = mc^2}$	**1**

Culoarea de fond : R(237), G(255), B(255)